УДК 532.529.5+536.2

В.С. Федотовский

ГНЦ РФ Физико-энергетический институт им. А.И. Лейпунского, г. Обнинск, Россия

ОБОБЩЕННАЯ ПРОВОДИМОСТЬ И КОЛЕБАТЕЛЬНО-ВОЛНОВЫЕ ПРОЦЕССЫ В ГЕТЕРОГЕННЫХ СРЕДАХ

АННОТАЦИЯ

Рассмотрено одно из эффективных свойств гетерогенных сред — динамическая плотность, учитывающая эффекты межфазного взаимодействия и определяющая колебательно-волновые процессы. Показано, что в ряде случаев эффективная динамическая плотность имеет аналогию с эффективной теплопроводностью гетерогенных материалов и проницаемостью пористых сред, и может рассматриваться с позиций обобщенной проводимости. Рассмотрены примеры динамики жидких дисперсных сред с включениями различной формы, упругих дисперсно-армированных композитов и стержневых систем. Приведены формулы для эффективной динамической плотности и дисперсионные зависимости для фазовой скорости распространения в них упругих волн.

1. ВВЕДЕНИЕ

При описании процессов переноса в микронеоднородных гетерогенных средах их часто можно считать макроскопически однородными и характеризовать набором эффективных свойств — коэффициентов теплопроводности, электропроводности, диффузии, проницаемости и т.п. К микронеоднородным гетерогенным средам и системам относятся разнообразные композитные материалы, газожидкостные дисперсные среды, насыщенные жидкостью пористые среды, а в некоторых случаях и многоэлементные инженерные конструкции типа стержневых или трубных пучков различных теплообменных устройств.

Для многих процессов эффективные свойства гетерогенных систем или коэффициенты переноса описываются эквивалентными математическими соотношениями, а проблема их отыскания имеет название задачи обобщенной проводимости. В терминах обобщенной проводимости обычно рассматриваются явления, описываемые законами тепло-электропроводности Фурье или Ома, законом диффузии Фика, законом фильтрации Дарси, а также соотношениями, связывающими индукцию электрического (магнитного) поля с напряженностью поля и коэффициентами диэлектрической или магнитной проницаемости.

Заметим здесь, что к задачам обобщенной проводимости можно отнести не только нахождение коэффициентов эффективной теплопроводности, электропроводности, диффузии или проницаемости, характеризующих гетерогенные среды в соответствующих стационарных процессах переноса тепла, электрического тока, массы или течения вязкой жидкости. Оказывается, что понятие обобщенной проводимости целесообразно применять и для описания инерционности гетерогенных сред, играющей значительную роль в динамических колебательно-волновых процессах. При динамических воздействиях на гетерогенные среды эффективная динамическая плотность, как мера инерционности, в общем случае отличается от статической плотности, вычисляемой по правилу смесей, и в ряде случаев описывается формулами, идентичными формулам для эффективного удельного термического (электрического) сопротивления. С одной стороны, такая аналогия обусловлена тем, что в гидродинамике связь ускорения с градиентом давления имеет такой же вид, что и законы Фурье, Ома и др., связывающие потоки тепла (тока) с градиентом температуры (потенциала). С другой стороны, идентичность задач обобщенной проводимости (эффективной динамической плотности и эффективного термического сопротивления) обусловлена тем, что поля скоростей и тепловых потоков находятся из решения уравнения Лапласа для гидродинамического потенциала или температуры при соответствующих граничных условиях.

В общем случае, однако, задача об эффективной динамической плотности гетерогенных сред значительно сложней и разнообразней. В колебательно-волновых процессах, протекающих в вязкоупругих гетерогенных средах, эффективная динамическая плотность может быть комплексной, а для некоторых классов сред иметь резонансную дисперсионную зависимость от частоты колебаний. Далее мы рассмотрим различные типы гетерогенных сред и их эффективные свойства, которые в случае макроскопической изотропии являются скалярными величинами, а в случае макроанизотропных систем — тензорами второго ранга.

2. ЭФФЕКТИВНЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ДИСПЕРСНЫХ СРЕД

Рассмотрим сначала поступательные колебания идеальной несжимаемой жидкости с взвешенными частицами, т.е. колебания идеальной дисперсной среды. Задача состоит в определении силы (в рассматриваемом случае поверхностной силы давления), создающей заданные колебания единичного объема дисперсной среды. Уравнение движения дисперсной среды при континуальном описании имеет вид

$$\rho^* \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} = -\nabla P \,, \tag{1}$$

где коэффициент ρ^* (в общем случае тензор второго ранга) при мгновенном ускорении дисперсной среды есть эффективная динамическая плотность.

Если дисперсная среда подвержена импульсивному воздействию поверхностных сил давления и какой-либо ее представительный элемент приобретает скорость $U(t)$, то из уравнения движения включений, имеющего вид [1]

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1+\gamma}{\Delta+\gamma}\right), \tag{2}$$

следует, что скорость включений будет равна

$$V = \frac{1+\gamma}{\Delta+\gamma} U \,, \tag{3}$$

где γ и $\Delta = \rho_0/\rho$ — коэффициент присоединенной массы и относительная плотность включений.

При континуальном описании импульс единичного объема дисперсной среды представляется в виде

$$I(t) = \rho^* U(t) \,. \tag{4}$$

С другой стороны, при микроскопическом рассмотрении импульс элемента дисперсной среды представим двумя составляющими — импульсом включений $I_0 = \rho_0 \alpha V$ и импульсом жидкости, который можно записать как произведение массы жидкости в единичном объеме дисперсной среды на скорость движения ее центра масс U^*

$$I_f = \rho U^* (1-\alpha) \,, \tag{5}$$

причем скорость центра масс жидкости U^*связана со скоростью дисперсной среды U и скоростью включений V соотношением

$$U^*(1-\alpha) = U - V\alpha \,, \tag{6}$$

вытекающим из определения статического момента масс.

Приравняв импульс, записанный в форме (4), к суммарному импульсу включений и жидкости, получим формулу для эффективной динамической плотности [1]

$$\frac{\rho^*}{\rho} = 1 + \frac{(1+\gamma)(\Delta-1)\alpha}{\Delta+\gamma} \,. \tag{7}$$

Для дисперсной среды со сферическими включениями коэффициент присоединенной массы описывается формулой

$$\gamma = \frac{1+2\alpha}{2(1-\alpha)} \,. \tag{8}$$

В этом случае из (7) следует

$$\frac{\rho^*}{\rho} = \frac{(2+\alpha)\Delta + (1-\alpha)}{2(1-\alpha)\Delta + (1+2\alpha)} \,. \tag{9}$$

Если, в частности, плотность включений существенно меньше плотности несущей среды (например, пузырьки газа в жидкости), то из (9) получается формула

$$\frac{\rho^*}{\rho} = \frac{1-\alpha}{1+2\alpha} \,, \tag{10}$$

хорошо согласующаяся с результатами экспериментальных вибродинамических исследований с колеблющейся пузырьковой средой [5].

Аналогичным образом из формулы (7) получаются формулы для эффективной динамической плотности анизотропной дисперсной среды с цилиндрическими включениями при подстановке в нее коэффициентов поперечной или продольной присоединенной массы

$$\gamma = \frac{1+\alpha}{1-\alpha} \quad \text{или} \quad \gamma = \frac{\alpha}{1-\alpha} \,. \tag{11}$$

Соответствующие компоненты тензора динамической плотности при этом выражаются формулами:

$$\frac{\rho^*}{\rho} = \frac{(1+\alpha)\Delta + (1-\alpha)}{(1-\alpha)\Delta + (1+\alpha)} \,, \tag{12}$$

$$\frac{\rho^*}{\rho} = \frac{\Delta}{\Delta(1-\alpha)+\alpha} \,. \tag{13}$$

Если сплошная фаза дисперсной среды является вязкой жидкостью, а динамическое воздействие на дисперсную среду является колебательным, то формула (7) несколько изменяется. В уравнении движения включений в колеблющейся жидкости появляется дополнительная сила вязкого сопротивления, пропорциональная относительной скорости включений, в результате чего эффективная динамическая плотность выражается комплексной величиной

$$\rho^*(i\omega) = \rho^*(\omega) - \frac{i}{\omega}\eta_t^*(\omega) \,,$$

действительная часть которой характеризует инерционность дисперсной среды

$$\frac{\rho^*}{\rho} = 1 + \left[\frac{\dfrac{1+\gamma}{\Delta+\gamma} + \dfrac{1}{(\omega\tau)^2}}{1 + \dfrac{1}{(\omega\tau)^2}}\right](\Delta-1)\alpha \,, \tag{14}$$

а мнимая часть, названная нами трансляционной вязкостью, — демпфирующее свойство [1]

$$\eta_t^* = \frac{\rho(1-\Delta)^2\alpha}{\tau(\Delta+\gamma)\left[1+\dfrac{1}{(\omega\tau)^2}\right]} \,, \tag{15}$$

где ω, τ — частота колебаний и время релаксации включений.

В предельном случае невязкой жидкости $(\omega\tau \to \infty)$ формула (14) переходит в (7). В другом предельном случае, когда сплошная фаза дисперсной среды является весьма вязкой жидкостью, а частота колебаний и размеры включений достаточно малы $(\omega\tau \to 0)$, относительное движение жидкости и включений исчезает (включения «вмораживаются» в жидкость), а из формулы (14) следует, что динамическая плотность становится равной плотности смеси

$$\rho_{\text{см}} = \rho(1-\alpha) + \rho_0\alpha . \qquad (16)$$

Трансляционная вязкость в этом случае, как следует из формулы (15), стремится к нулю. Из-за «вмороженности» включений в вязкую жидкость диссипативных потерь в среде нет. Очевиден также случай $\Delta = 1$, когда из-за отсутствия относительного движения при любой вязкости жидкости эффективная трансляционная вязкость также обращается в нуль.

Если же $\omega\tau >> 1$, то, в частности, для дисперсных сред со сферическими включениями формула для трансляционной вязкости принимает вид

$$\frac{\eta_t{}^*}{\eta} a\delta = \frac{18\alpha(1-\Delta)^2}{\left[2\Delta(1-\alpha)+(1+2\alpha)\right]^2} , \qquad (17)$$

где η — вязкость жидкости, a — радиус частиц, $\delta = \sqrt{2\eta/\rho\omega} << a$.

Отметим здесь, что формула (17) при $\Delta = 0$ удовлетворительно согласуется с экспериментальными результатами по трансляционной вязкости пузырьковых сред [5].

В случае дисперсных сред с эллипсоидальными включениями, эффективные динамические свойства должны зависеть еще от отношения осей эллипсоидов. В частности, для сфероидов с экваториальным радиусом a и полуосью вращения c коэффициент присоединенной массы равен

$$\gamma = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{c}\right)\frac{1+2\alpha\,(a/c)}{1-\alpha\,(a/c)} , \qquad (18)$$

а формула для динамической плотности (7) принимает вид

$$\frac{\rho^*}{\rho} = 1 + \frac{\left[1+\frac{1}{2}(a/c)\frac{1+2\alpha(a/c)}{1-\alpha(a/c)}\right](\Delta-1)\alpha}{\Delta + \frac{1}{2}(a/c)\frac{1+2\alpha(a/c)}{1-\alpha(a/c)}} . \qquad (19)$$

Из этой формулы следует, что динамическая плотность дисперсной среды с предельно сплюснутыми в направлении воздействия включениями ($c/a \to 0$) равна истинной плотности смеси (16). Физический смысл этого заключается в том, что из-за большой присоединенной массы включения становятся «вмороженными» в жидкость так же, как в случае несущей жидкости с большой вязкостью.

Интересен также другой предельный случай дисперсной среды с вытянутыми в направлении воздействия включениями. Если, в частности, включениями являются иглоподобные безмассовые частицы, то из (19) следует

$$\frac{\rho^*}{\rho} = 1 - \varphi - 2(c/a)\alpha . \qquad (20)$$

Величина $a/2c$ в данном случае характеризует коэффициент присоединенной массы предельно вытянутого эллипсоидального включения в ансамбле. Приняв ее равной минимально возможному значению $\gamma = \alpha/(1-\alpha)$, получим неожиданный результат $\rho^*/\rho = 0$, означающий, что такая дисперсная среда не имеет инерции.

3. ЭФФЕКТИВНАЯ ДИНАМИЧЕСКАЯ ПЛОТНОСТЬ И ОБОБЩЕННАЯ ПРОВОДИМОСТЬ

Исходя из известной аналогии между течением идеальной жидкости и проводимостью (тепло- или электропроводностью), основанной на идентичности уравнения Лапласа для потенциала скорости, температуры или электрического потенциала, рассмотрим здесь аналогию между эффективной динамической плотностью и эффективной проводимостью дисперсных сред [2].

Если дисперсная среда образована жидкостью и содержащимися в ней бесконечно инерционными и, следовательно, неподвижными в пространстве включениями, то движение среды при динамических воздействиях на жидкость представляет собой динамическую фильтрацию жидкости через ансамбль тел-препятствий. Для теплопроводного дисперсного материала той же структуры подобная по линиям теплового потока «фильтрация» будет происходить в том случае, когда включения имеют бесконечное термическое сопротивление R_0 (нулевую теплопроводность). В этом случае будет соблюдаться подобие поля скорости и плотности теплового потока в среде, содержащей ансамбль включений. Из этого следует, что в случае геометрического подобия формы включений, идентичности их ориентации и объемной концентрации, выполняется равенство

$$\frac{\rho^*}{\rho} = \frac{R^*}{R} = \frac{\sigma}{\sigma^*} \quad \text{при} \quad \frac{\rho_0}{\rho} = \frac{R_0}{R} = \frac{\sigma}{\sigma_0} = \infty , \qquad (21)$$

в котором заключается частная аналогия эффективной динамической плотности и обобщенной проводимости гетерогенных сред. Кроме того, из гидродинамической задачи о движении включения с конечной плотностью, вызванного импульсивным движением идеальной жидкости, следует, что отношение скорости включения V к скорости жидкости на бесконечности U определяется формулой (3), которая для одиночной сферической частицы (γ = 1/2) или одиночного цилиндра (γ = 1) дает

$$\frac{V}{U} = \frac{3}{2\frac{\rho_0}{\rho}+1} \quad \text{или} \quad \frac{V}{U} = \frac{2}{\frac{\rho_0}{\rho}+1} . \qquad (22)$$

С другой стороны, из решения задач теплопроводности в среде со сферическим или цилиндрическим включением известно, что отношение плотности теплового потока внутри включения j_0 к плотности потока на бесконечности j_∞ равно

$$\frac{j_0}{j_\infty} = \frac{3}{2\dfrac{\sigma}{\sigma_0} + 1}, \quad \frac{j_0}{j_\infty} = \frac{2}{\dfrac{\sigma}{\sigma_0} + 1}, \tag{23}$$

что в точности соответствует отношению скоростей в гидродинамической задаче.

Такая аналогия справедлива и для эллипсоидальных тел, независимо от их ориентации относительно направления скорости жидкости или теплового потока на бесконечности.

Основываясь на идентичности задач гидродинамики обтекания включений и проводимости (21), (22), (23), предположим, что аналогия эффективной динамической плотности и обобщенной проводимости дисперсных сред справедлива и в общем случае с произвольной плотностью и проводимостью включений. Тогда формула для динамической плотности дисперсной среды (7), записанная в обозначениях обобщенной проводимости, принимает вид [2]

$$\frac{\sigma}{\sigma^*} = 1 + \frac{(1+\gamma)(\sigma/\sigma_0 - 1)\alpha}{\sigma/\sigma_0 + \gamma}. \tag{24}$$

где тензор присоединенной массы γ в задаче проводимости имеет смысл форм-фактора включений.

Действительно, оказывается, что для дисперсных сред со сферическими или цилиндрическими включениями формула (24) при подстановке соответствующих коэффициентов присоединенной массы приводит к известным формулам Максвелла и ряда других авторов, что подтверждает справедливость аналогии динамической плотности и обобщенной проводимости.

4. ДИНАМИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА СРЕД С ВКЛЮЧЕНИЯМИ-ОСЦИЛЛЯТОРАМИ

В качестве специфических гетерогенных сред с включениями-осцилляторами можно рассматривать, например, системы, содержащие жидкость и большое число закрепленных на концах упругих стержневых элементов. Если частота внешних воздействий на такую гетерогенную среду окажется близкой к собственной частоте изгибных колебаний стержневых элементов, то в гетерогенной среде возникнет резонанс включений-осцилляторов, который проявляется в резонансной дисперсионной зависимости эффективных динамических свойств — динамической плотности и трансляционной вязкости. Простейшей моделью гетерогенных сред подобного типа является жидкость, содержащая равномерно распределенные включения, закрепленные в пространстве с помощью упругих связей (пружин), и имеющие некоторую собственную частоту поступательных колебаний ω_0. Эффективная динамическая плотность такой среды выражается формулой [1]

$$\frac{\rho^*}{\rho} = 1 - (1+\gamma)\left(\frac{\dfrac{\omega_0^2}{\omega^2} + \dfrac{1-\Delta}{\Delta+\gamma}}{1 - \dfrac{\omega_0^2}{\omega^2}}\right)\alpha, \tag{25}$$

откуда, в частности, следует, что при частоте воздействий на гетерогенную среду, определяемую соотношением

$$\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 = \frac{1 + \dfrac{(1+\gamma)(\Delta-1)\alpha}{\Delta+\gamma}}{1+(1+\gamma)\alpha}, \tag{26}$$

динамическая плотность обращается в нуль, и далее, до значения $\omega_0/\omega = 1$ является отрицательной величиной. Силовое воздействие в этом диапазоне частот и вызванное им колебательное ускорение среды имеют противоположные направления.

Интересно отметить, что отношение квадратов частот (26), при котором динамическая плотность обращается в нуль, равно отношению динамических плотностей дисперсных сред в двух противоположных случаях. Один из них выполняется при условии $\omega_0/\omega = 0$, т.е. в случае со свободно взвешенными включениями, когда динамическая плотность выражается формулой (7), а другой — при условии $\omega_0/\omega = \infty$, т.е. в случае с жестко закрепленными включениями, когда формула для динамической плотности (25) принимает вид

$$\frac{\rho_\infty^*}{\rho} = 1 + (1+\gamma)\alpha. \tag{27}$$

Другим типом гетерогенной среды с включениями-осцилляторами является дисперсно-армированный композит, образованный упругой матрицей и твердыми частицами. В такой среде включения являются осцилляторами из-за упругих сил, действующих со стороны упругой матрицы при их отклонении от равновесного положения. Здесь также резонансные колебания включений относительно упругой матрицы проявляются в динамической плотности и трансляционной вязкости. Эффективная динамическая плотность композита выражается следующей резонансной зависимостью [1]:

$$\frac{\rho^*}{\rho} = 1 + \frac{\dfrac{\omega_0^2}{\omega^2} - \dfrac{1+\gamma}{\Delta+\gamma}}{\dfrac{\omega_0^2}{\omega^2} - 1}(\Delta-1)\alpha, \tag{28}$$

где собственная частота поступательных колебаний включений $\omega_0 \approx (\mu/\rho_0)^{1/2}/a$, μ — модуль сдвига материала матрицы.

Если собственная частота колебаний включений-осцилляторов будет существенно больше частоты воздействия на композит ($\omega_0/\omega \to \infty$), то включения не смещаются относительно матрицы, а динамическая плотность композита определяется правилом смесей (15).

Если, наоборот, собственная частота включений-осцилляторов будет существенно меньше частоты воздействий ($\omega_0/\omega \to 0$), то из (28) следует формула (7) для дисперсных сред со свободно взвешенными включениями. Заметим, что здесь коэффициент γ отличается от коэффициента присоединенной массы идеальной жидкости.

5. РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН В ГЕТЕРОГЕННЫХ СРЕДАХ

Процесс распространения волн в гетерогенных средах определяется эффективными инерционными, упругими и вязкими свойствами, зависящими от свойств компонентов и частоты воздействий.

Из волнового уравнения, описывающего распространение плоской продольной волны в направлении X,

$$\rho^*\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}+\eta^*_t\,\frac{\partial U}{\partial t}=\left(K^*+\frac{4}{3}\mu^*\right)\frac{\partial^2 U}{\partial X^2}, \qquad (29)$$

где K^* и μ^* — эффективные упругие (или вязкоупругие) модули гетерогенной среды, следует, что для затухающей волны $U=U_0 e^{i(\omega t-kX)}$ дисперсионное соотношение имеет вид

$$\left(\frac{k}{\omega}\right)^2=\frac{\rho^*-\dfrac{i}{\omega}\eta_t^*}{K^*+\dfrac{4}{3}\mu^*}. \qquad (30)$$

Действительная часть ω/k дает фазовую скорость волны, а мнимая часть волнового числа k дает коэффициент пространственного затухания волны.

Для слабозатухающих волн мнимая часть (30) мала по сравнению с действительной и фазовая скорость определяется эффективными модулями упругости и эффективной динамической плотностью

$$C^*=\mathrm{Re}\left(\omega/k\right)=\left(\frac{K^*+\dfrac{4}{3}\mu^*}{\rho^*}\right)^{1/2}. \qquad (31)$$

Поскольку эффективная динамическая плотность гетерогенных сред некоторых типов зависит от временных параметров (постоянной времени релаксации включений τ, собственной частоты колебаний включений-осцилляторов), т.е. представлены дисперсионными соотношениями, то и процесс распространения волн в таких средах также будет описываться дисперсионными соотношениями релаксационного или резонансного типа.

Конкретизируем зависимость (31) для дисперсных сред, образованных жидкостью и сферическими включениями. Считая в длинноволновом приближении процесс объёмного сжатия-растяжения дисперсной среды квазистатическим, эффективную сжимаемость среды $\beta^*=1/K^*$ определим по правилу смесей. Приняв для сжимаемости жидкости и материала включений соотношения $\beta_0=(\rho_0 C_0{}^2)^{-1}$ и $\beta=(\rho C^2)^{-1}$, где C, C_0— скорость звука в однородной жидкости и в материале включений, эффективную сжимаемость дисперсной среды представим в виде

$$\beta^*=\frac{1-\alpha}{\rho C^2}+\frac{\alpha}{\rho_0 C_0^2}. \qquad (32)$$

Тогда формулу (31) для скорости звука в дисперсной среде со сферическими включениями запишем в виде [3]

$$\frac{1}{C^{*2}}=\left\{\left(\frac{1-\alpha}{C^2}+\frac{\alpha}{C_0^2\Delta}\right)\frac{(2+\alpha)\Delta+(1-\alpha)}{2(1-\alpha)\Delta+(1+2\alpha)}\right\}. \qquad (33)$$

В частности, для газожидкостных сред со сферическими пузырьками (Δ=0) при не очень малой концентрации пузырьков, когда первым слагаемым в круглых скобках можно пренебречь, из (33) следует

$$\left(\frac{C^*}{C_0}\right)^2=\frac{\Delta(1+2\alpha)}{\alpha(1-\alpha)}. \qquad (34)$$

Считая процесс сжатия газа в пузырьках адиабатическим и выражая сжимаемость газа $\beta_0=1/C_0{}^2\rho_0$ через давление p_0, зависимость (34) запишем в виде [4]

$$C^{*2}=\frac{p_0\chi(1+2\alpha)}{\rho\alpha(1-\alpha)}. \qquad (35)$$

При нормальных условиях, согласно (35), скорость звука в пузырьковой среде принимает минимальное значение ~30 м/с при объемном газосодержании $\alpha = 0.37$.

При достаточно высоких частотах акустических волн проявляются резонансные свойства газовых пузырьков-осцилляторов в эффективной динамической сжимаемости среды. С учетом формулы для динамической плотности (10) дисперсионная зависимость скорости звука в этом случае принимает вид [1]

$$\frac{1}{C^{*2}}=\left(\frac{1-\alpha}{1+2\alpha}\right)\left[\frac{\alpha\rho}{C_0^2\rho_0\left(1-\omega^2/\omega_0^2\right)}+\frac{1-\alpha}{C^2}\right], \qquad (36)$$

где C_0, C — адиабатическая скорость звука в газе и в жидкости.

Из формулы видно, что при приближении частоты звука к собственной частоте объемных колебаний пузырьков, когда динамическая сжимаемость среды резонансным образом возрастает, скорость звука уменьшается. Далее, в некотором диапазоне частот, где динамическая сжимаемость имеет отрицательные значения, а скорость звука становится мнимой величиной, волны в пузырьковой среде не распространяются. При больших частотах динамическая сжимаемость среды увеличивается, но остается меньше сжимаемости жидкости. Скорость звука при этом будет несколько больше, чем скорость звука в жидкости. Таким образом, это хорошо известное явление резонансной дисперсии звука в пузырьковых средах [4] имеет простую и наглядную интерпретацию. В данном случае дисперсия звука обусловлена резонансной зависимостью эффективной динамической сжимаемости пузырьковой среды.

Аналогичным образом, на основе концепции эффективных динамических свойств можно рассматривать распространение звука в насыщенных жидкостью пористых средах и в упругих композитах.

Рассматривая, например, распространение продольных волн в дисперсно-армированном композите, материал матрицы которого имеет малый модуль сдвига, эффективную сжимаемость определим по правилу смесей. Тогда, с учетом формулы для эффективной динамической плотности (28) резонансную дисперсионную зависимость для скорости звука в таком композите запишем в виде

$$\left(\frac{C}{C^*}\right)^2 = \left[1+\frac{\frac{\omega_0^2}{\omega^2}-\frac{1+\gamma}{\Delta+\gamma}}{\frac{\omega_0^2}{\omega^2}-1}(\Delta-1)\alpha\right](1-\alpha), \qquad (37)$$

где C — скорость продольных волн в материале матрицы.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В приведенных примерах гетерогенных сред для описания их динамических свойств и волновых характеристик были использованы решения линеаризованных задач о поступательных колебаниях или объемных осцилляциях включений в несущей среде (в жидкости или в упругом материале матрицы); при этом в результаты не входит амплитуда воздействий.

Следует отметить, однако, что если включения в жидких дисперсных средах являются осцилляторами квадрупольного типа, т.е. включения (капли или пузырьки) могут совершать деформационные колебания, то в этом случае также может проявиться резонансная дисперсия эффективной динамической плотности и звука. Здесь, в отличие от рассмотренных выше дисперсных сред, возникают поступательно-деформационные колебания включений, квадратично-зависящие от амплитуды воздействий. Резонансная дисперсия звука в этом случае зависит от амплитуды воздействий и происходит при частоте, близкой к половине собственной частоты деформационных колебаний включений. Такой тип параметрической резонансной дисперсии был теоретически предсказан и экспериментально обнаружен в пузырьковых средах [6].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Федотовский В.С.** О динамике гетерогенных сред при виброакустических воздействиях // Труды Матем. центра им. Н.И. Лобачевского. Казань, 2002. Т.16. С. 75—91.
2. **Федотовский В.С**. Эффективная теплопроводность гетерогенных материалов // Первая Рос. нац. конф. по теплообмену. М.: Издательство МЭИ, 1994. Т. 10. С. 116—120.
3. **Федотовский В.С., Прохоров Ю.П., Верещагина Т.Н.** Динамическая плотность и скорость распространения волн давления в дисперсных средах // Теплоэнергетика. 2001. № 3. С. 70—74.
4. **Накоряков В.Е., Покусаев Б.Г., Шрейбер И.Р.** Распространение волн в газо- и парожидкостных средах. Новосибирск: Институт теплофизики СО АН ССР, 1983. 237 с.
5. **Fedotovsky V.S., Vereshchagina T.N., Terenik L.V.** Dynamics of bubble media under vibration // Two-phase flow modeling and experimentation: Proc. of 3rd Intern. Symp. Pisa: 2004. P. № ven 35.
6. **Fedotovsky V.S., Vereschagina T.N., Derbenev A.V**. Experimental Research of Resonance Sound Dispersion in Bubbly Media: Proc. // Intern. Conf. Fluxes and structures in fruids — 2005. Moscow: IPM RAS, 2006. P.119—123.