УДК 533

М.Р. Петриченко, Н.С. Харьков

Санкт-Петербургский государственный политехнический университет, Россия

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА СПИНОВЫХ ДВИЖЕНИЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

АННОТАЦИЯ

Традиционные уравнения однородного винтового движения обладают частными решениями, несовместимыми с однородными граничными условиями. В этих решениях не выполняется условие одновременного обращения в нуль осевой и азимутальной компонент вектора скорости на стенках канала, ограничивающих поток. Дело в том, что сильные решения краевой задачи Бельтрами обладают простым точечным спектром. Это либо нули цилиндрического синуса $J_1(z)$, либо нули цилиндрического косинуса $J_0(z)$, образующие разные (чередующиеся) последовательности значений.

В настоящем сообщении сделана попытка ослабления традиционной постановки задачи Бельтрами. Используется эвристический подход. Навязывается первообразная функция, изображающая квадрат нормы вихря в круге r<R. Записывается необходимое условие экстремума. Частные решения уравнения Лагранжа сопоставляются с известными распределениями азимутальной скорости. Выясняется, что среди этих решений имеются известные компоненты движения – твердый и потенциальный вихри. Кроме того, имеются новые классы решений, совместные с однородными граничными условиями на обе компоненты вектора скорости, осевую и азимутальную. Эти решения удается удовлетворительно верифицировать с результатами численных и аэродинамических экспериментов.

1. НЕОБХОДИМОЕ УСЛОВИЕ МИНИМУМА

В осесимметричном движении с осевым вихрем компоненты вихря и компоненты скорости связаны условиями (тождествами) Бельтрами:

$$u_x = \lambda\omega_x,\ \omega_x = \frac{du_\varepsilon}{dr} + \frac{u_\varepsilon}{r};$$

$$u_\varepsilon = \lambda\omega_\varepsilon,\ \omega_\varepsilon = -\frac{du_x}{dr}.$$

Эти соотношения равносильны одному уравнению второго порядка на каждую компоненту скорости, осевую u_x и азимутальную u_ε. Справедливы утверждения.

А. Условия Бельтрами совпадают с необходимыми условиями минимума для функционала:

$$\|\omega_x\|^2 = \int_0^R r\left(\lambda^2\left(\frac{d\omega_x}{dr}\right)^2 - \omega_x^2\right)dr.$$

Действительно, необходимое условие минимума имеет вид

$$\frac{d}{dr}\left(\lambda^2 r\frac{d\omega_x}{dr}\right) + r\omega_x = 0,\ \omega_x(0) - \omega_0 = 0,$$

откуда следует:

$$\omega_x = \omega_0 J_0\left(\frac{r}{\lambda}\right),\ u_x = \lambda\omega_0 J_0\left(\frac{r}{\lambda}\right),\ u_\varepsilon = \omega_0\lambda J_1\left(\frac{r}{\lambda}\right).$$

Эти распределения скорости и вихря совпадают с точными решениями для винтового потока Бельтрами, что и требовалось доказать.

Норма $\|\omega_x\| = 0$ тождественно, если $\omega_x = \omega_0\exp\left(-\frac{r}{\lambda}\right)$. Тогда:

$$u_x = \lambda\omega_0\exp\left(-\frac{r}{\lambda}\right),$$

$$u_\varepsilon = \frac{\omega_0\lambda^2}{r}\left(1 - \exp\left(-\frac{r}{\lambda}\right)\right) - \omega_0\lambda\exp\left(-\frac{r}{\lambda}\right).$$

Очевидно, что $u_\varepsilon \doteq -\frac{\omega_0 r}{2}$, $r \ll \lambda$ и $u_\varepsilon \approx \frac{\omega_0\lambda^2}{r}$, $\lambda \ll r$. Иными словами, вблизи оси вихря устанавливается твердое вращение, на периферии – потенциальный вихрь Б. Если λ<<1, то предыдущее условие на норму вихря

$$\|\omega_x\|^2 \to \inf,$$

равносильно условию на норму скорости деформации

$$\left\|\dot{\varepsilon}\right\|^2 = \int_0^R r\left(\frac{du_\varepsilon}{dr} - \frac{u_\varepsilon}{r}\right)^2 dr \to \inf.$$

Общее решение уравнения Эйлера, выражающее необходимое условие экстремума для норм вихря и скорости деформации, имеет вид:

$$u_\varepsilon = C_1 r + \frac{C_2}{r}.$$

Существование частных решений типа твердого и потенциального вихрей следует из уравнений Стокса, содержащихся в необходимом условии экстремума. Частные решения отвечают абсолютному минимуму вихря и абсолютному минимуму скорости деформации. Действительно, если C_1= 0, вихрь равен нулю. Если C_2=0, то скорость деформации равна нулю.

Пусть

$$\Gamma_\pm(R) = \int_0^R r\gamma_\pm^2 dr \to \inf > 0,\ \gamma_\pm = \frac{du_\varepsilon}{dr} \pm \frac{u_\varepsilon}{r}.$$

Квадратичный функционал $\Gamma_\pm$ интерпретируется как среднеквадратичная норма вихря (верхний знак) и скорости деформации (нижний знак). С гидродинамической точки зрения норма скорости деформации совпадает со скоростью диссипации механической энергии.

На азимутальную скорость накладывается ограничение:

$$\int_0^R r^{N+1} u_\varepsilon^M dr = L_N^{(M)} = fix .$$

Можно доказать, что действительному распределению скорости в ограниченном круге отвечает значение М=1. Например, в винтовом потоке фиксируется величина расхода:

$$\int_0^R r u_x dr = \int_0^R \lambda r \omega_x dr = \int_0^R \lambda d\left(r u_\varepsilon\right) = -\int_0^R r u_\varepsilon d\lambda\left(r\right).$$

Чтобы ограничение на расход совпадало с ограничением на азимутальную скорость, М = 1, естественно, предположить: $\frac{d\lambda}{dr} = -\mathrm{const}\cdot r^N$. Предельные условия на азимутальную скорость в круге $r < R$ выражают ограниченность скорости в центре круга, $|u_\varepsilon(0)| < \infty$, и условие прилипания на окружности $r = R$, $u_\varepsilon(R) = 0$. Всякое распределение скорости, отвечающее этим предельным условием, назовем виртуальным. Среди виртуальных распределений скорости существует хотя бы одно действительное или наблюдаемое распределение скорости. Для достаточно гладких распределений скорости действительных распределений не больше одного.

Следующие признаки достаточны для отделения виртуальных распределений скорости от действительных распределений.

В действительном винтовом потоке при фиксированной величине расхода (пропорциональной L_N) величина завихренности или скорости деформации минимальна. Любой виртуальный винтовой поток с заданным фиксированным расходом обладает не меньшей завихренностью (скоростью деформации), чем действительный винтовой поток. Или, что представляет двойственную формулировку предыдущего утверждения, при фиксированной величине завихренности (скорости деформации) действительный винтовой поток обладает максимальным расходом. Любой виртуальный поток с заданной фиксированной завихренностью (скоростью деформации) обладает не большим расходом, чем действительный винтовой поток.

Решение изопариметрической задачи имеет вид:

$$u_\varepsilon\left(r;\, N\right) = \omega_0 R y\left(1 - y^{N+1}\right),\ y = \frac{r}{R}.$$

Здесь ω_0 – значение завихренности в центре круга $r < R$, иначе угловая скорость твердого вращения.

Полученное распределение скорости обладает свойствами твердого вихря при малых значениях $y << 1$ ($r << R$) и монотонно убывает при приближении к границе круга $r < R$ ($y < 1$). Область твердого вихря тем больше, чем больше N.

Скорость деформации $\dot{\varepsilon}\left(y;\, N\right) = -\omega_0\left(N+1\right)\times$ $\times y^{N+1}$. Она отделена от нуля, если $N > -1$.

Завихренность $\omega = \frac{1}{2r}\frac{d}{dr}\left(r u_\varepsilon\right) = \omega_0\left(1 - \frac{N+3}{2}\times\right.$ $\left.\times y^{N+1}\right)$ обладает свойствами:

1. Среднее арифметическое значение завихренности в круге $r < R$ равно 0; 2. Среднее квадратическое значение завихренности в круге $r < R$,

$$\|\omega\|_2^2 := \frac{1}{2}\Gamma_+ = 2\int_0^1 y\omega^2 dy = \frac{\omega_0^2}{4}\frac{\left(N+1\right)^2}{N+2} \ge 0,\ N \ge -1;$$

3. Средняя квадратическая завихренность вчетверо меньше средней квадратической скорости деформации: $\Gamma_- = 4\Gamma_+$.

При $N \to \infty$ область, занятая твердым вихрем, простирается до границы круга $r < R$. При этом всюду внутри круга $\dot{\varepsilon} \underset{N\to\infty}{\to} 0$, поэтому и скорость диссипации механической энергии $\Gamma_-(r) = 0$, $r < R$. Максимум азимутальной скорости приходится на значение радиуса $y = y_{\max} = \left(\frac{1}{N+2}\right)^{\frac{1}{N+1}} \underset{N\to\infty}{\to} 1-0$. При этом максимальное значение азимутальной скорости $u_{\varepsilon\max} = \omega_0 R\frac{N+1}{\left(N+2\right)^{\frac{N+2}{N+1}}}$. Очевидно, $u_{\varepsilon\max} \underset{N\to\infty}{\to} \omega_0 R,\ \omega_0 = \omega\left(0\right)$.

Продольная компонента скорости

$$u_x = \lambda\omega = \lambda\omega_0\left(1 - \frac{N+3}{2}y^{N+1}\right),$$

причем параметр Бельтрами удовлетворяет дифференциальному условию: $\frac{d\lambda}{dr} = -\mathrm{const}\cdot r^N$. Можно рассматривать это равенство как дифференциальное уравнение для $\lambda(r)$, удовлетворяющее начальному условию: $\lambda(R) = 0$. Это начальное условие позволяет обнулить осевую компоненту скорости на стенке (на окружности $r = R$).

Тогда $\lambda = \lambda_0\left(1 - y^{N+1}\right)$, $u_x = \lambda_0\omega_0\left(1 - y^{N+1}\right)\times$ $\times\left(1 - \frac{N+3}{2}y^{N+1}\right)$. Поскольку должно выполняться неравенство $N > -1$, обеспечивающее ненулевое распределение азимутальной скорости, то профиль осевой скорости изменяет знак, если $y = y_0 = \left(\frac{2}{N+3}\right)^{\frac{1}{N+1}} < 1$. Например, пусть ось x ($r = 0$) направлена снизу вверх. Тогда осевая скорость направлена вверх при $y < y_0$ и меняет знак (направлена вниз) при $y > y_0$. На окружности $y = y_0$ существует только азимутальная скорость («чистое» вращение). Иначе говоря, в центре канала осевой поток направлен вверх, на периферии канала, $y_0 < y < 1$, осевой поток направлен вниз. Величина расхода сквозь круг $r < R$ позволяет вычислить значение параметра Бельтрами в центре круга, $\lambda(0) = \lambda_0$. Действительно:

$$Q = 2R^2 \int_0^R y u_x dy = \frac{\lambda_0 \omega_0 R^2 (N+1)^2}{2(N+2)(N+3)}.$$

Тогда

$$\frac{\lambda_0}{R} = \frac{2Q(N+2)(N+3)}{\omega_0 R^3 (N+1)^2}.$$

Очевидно: $\lambda_0 \underset{N\to\infty}{\downarrow} \dfrac{2Q}{\omega_0 R^2}$.

Величина параметра N, при фиксированных значениях угловой скорости в полюсе ω_0, радиуса трубы R и расхода Q, связана с величиной λ_0 параметра Бельтрами. Параметр Бельтрами монотонно уменьшается от ∞ до $2Q/(\omega_0 R^2)$ при увеличении N от -1 до ∞. Бесконечному значению параметра Бельтрами соответствует поступательный поток. Нижняя грань параметра Бельтрами соответствует переносу поступательным движением твердого вихря. Например, пусть во входном сечении канала при пассивной или при активной генерации вихря возникает вращение жидкости как твердого тела. Тогда $N = \infty$, $\lambda_0 = 2Q/(\omega_0 R^2)$. В любом другом сечении канала условие прилипания приводит к снижению N и к увеличению λ_0, т.е., по-сути, к «перераспределению» кинетической энергии в пользу поступательного движения. Уменьшение кинетической энергии вращательного движения по длине потока восстанавливает полный напор поступательного потока. Поэтому складывается впечатление, что в винтовом потоке потери полного напора меньше, чем в чисто-поступательном потоке. На самом же деле некоторое восстановление полного напора по длине винтового потока если и происходит, то только за счет кинетической энергии вращения жидкости.

2. ПАРАМЕТР ЗАКРУТКИ

Логарифмическая производная $m = \dfrac{d \ln u_\varepsilon}{d \ln r}$ представляет удобную безразмерную характеристику распределения азимутальной скорости.

Для «твердого» вращения $m = 1$, для «потенциального» вихря $m = -1$. Для распределения скорости, полученного в предыдущем пункте, $m = m(y) = \dfrac{1-(N+2)y^{N+1}}{1-y^{N+1}}$. Это означает, что в полученном распределении параметр закрутки есть монотонно убывающая функция радиуса, причем $m(0) = 1$, $m(y_0) = 0$, $m(1) = -\infty$.

Так как в действительном движении $\Gamma_\pm \to \inf \geq 0$, для любого знака, то *в действительном распределении азимутальной скорости параметр закрутки наименее уклоняется от ±1*(по среднеквадратичной норме). Если $m = 1$, скорость деформации равна 0; если $m = -1$, то завихренность равна нулю.

Для описания процессов переноса важны предельные значения параметра закрутки m. Например, теплоотдача между торцевой поверхности цилиндрического вихря и твердой плоскостью блокирована, если $m > -3$. Множество значений радиуса круга $r < R$, на котором теплоотдача разблокирована, описывается неравенствами:

$$\left(\frac{4}{N+5}\right)^{\frac{1}{N+1}} < y < 1.$$

Вообще, кольцо $\Re_p$, в котором $m < -p \leq 0$, описывается неравенствами:

$$\left(\frac{p+1}{N+2+p}\right)^{\frac{1}{N+1}} < y < 1.$$

В предельном случае затухания вихревого движения $N \to -1$, тогда

$$e^{-\frac{1}{p+1}} < y < 1.$$

Наоборот, при $N \to \infty$, ширина колец $\Re_p$ стремится к нулю. Все кольца стягиваются к окружности $y = 1$ ($r = R$).

3. ВЕРИФИКАЦИЯ

Демонстрируются расчеты винтовых течений вязкой жидкости, осуществляемые в среде АНСИС с замыканием системы уравнений Стокса низкорейнольдсовой моделью турбулентного движения Гиримаджи. Вычисляемые распределения осевой и азимутальной компонент скорости в гидравлически гладкой цилиндрической трубе сопоставляются с прогнозируемыми распределениями по локальным и по интегральным характеристикам течения. Обсуждается зависимость винтового движения от параметров задачи: от формы эпюры азимутальной скорости в начальном сечении и от величины начального значения параметра Бельтрами. Полученные распределения азимутальной и осевой скорости идентифицируются также с результатами, полученными Ш.А. Пиралишвили и Э.Н. Сабуровым для конкретных технических устройств.

4. РЕЗЮМЕ

Уравнения спинового или винтового движения совпадают с необходимым условием минимума квадратичного функционала, изображающего квадрат некоторой нормы вихря. В условиях слабой закрутки (параметр Бельтрами существенно меньше размера области, занятой потоком) условие минимума на завихренность совпадает с условием минимума на скорость деформации. Распределение азимутальной скорости в ограниченной области расслаивается на твердое ядро и периферийную область с быстрым уменьшением скорости до нуля.