УДК 541.64:547(256.2 + 313)

Л.П. Холпанов., С.Е. Закиев

Институт проблем химической физики РАН, г. Черноголовка, Россия

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВУМЕРНОГО ПЛЕНОЧНОГО ТЕЧЕНИЯ С УЧЕТОМ ВХОДНОГО УЧАСТКА

АННОТАЦИЯ

В настоящей работе проведен расчет пленочного течения жидкости по вертикальной стенке с искомым градиентом давления и свободной границей.

1. ВВЕДЕНИЕ

Интерес к технологиям на малых масштабах (в том числе нано-) заставляет для жидко-газофазных процессов обратить особое внимание на проточные реакторы пленочного типа, в основу которых заложен принцип организации процессов реагирования в тонкой пленке жидкости, текущей по твердой поверхности.

К настоящему времени хорошо изучены многие гидродинамические аспекты реакторов данного типа, рассмотренные на основании решения уравнения Навье—Стокса в приближении Прандтля [1]. Согласно этому приближению при решении уравнений Навье—Стокса не учитывались члены порядка $(h_0/l)^2$, где h_0, l — соответственно средняя толщина пленки и длина трубки. Специфика быстрых химических превращений, протекающих вблизи входного участка, требует повысить точность решения именно на этом участке, где характер течения пленки жидкости вблизи входа в пленочный реактор существенно сказывается на качестве конечного продукта химических превращений.

При исследовании подобных математических моделей возникает ряд принципиально новых проблем. Одна из них связана с тем, что все они относятся к классу нелинейных задач со свободными границами. Ранее изучавшиеся чисто гидродинамические модели также относились к задачам этого типа, в связи с чем, был построен метод поверхностей равного расхода, оказавшийся исключительно плодотворным для их исследования. К числу его достоинств, прежде всего, следует отнести общность (применимость к весьма внушительному классу задач) и простоту процесса реализации в конкретных случаях [1].

В настоящей работе изложен метод сведения ранее изучавшихся гидродинамических моделей с искомыми границами к задачам с известными границами, причем таким образом, что при их исследовании можно опять-таки пользоваться методом поверхностей равного расхода в полном объеме. Тем самым указывается формальный путь, с помощью которого можно значительно упростить исследования выше обозначенных сложных комплексных гидрофизико-химических задач.

Предлагаемый метод будет изложен на примере одного из практически очень важных случаев — стационарного турбулентного течения пленки по вертикальной поверхности. Как легко видеть он без труда обобщается как на случай вертикального течения пленок с двух разных сторон разделяющей их стенки (одна из которых может служить, например, охладителем другой, в которой идут экзотермические превращения), так и на случай движения пленки по наклонной поверхности. В формулировке модели мы оттолкнемся не от приближения Прандтля, а от более общей двумерной постановки Навье—Стокса. Направим ось $O\tilde{x}$ вдоль направления движения пленок (действия силы тяжести), а ось $O\tilde{y}$ — ортогонально поверхности течения. При этом для простоты положим, что плотность стекающей жидкости остается неизменной в течение всего процесса (реагирующая смесь считается несжимаемой). Отметим, что приближение несжимаемости при пленочном течении успешно прошло непосредственную экспериментальную проверку для многочисленного набора реальных физических систем [1].

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Итак, рассмотрим систему

$$div\left(\bar{U}\right)=0\,; \tag{1}$$

$$\frac{\partial U_1}{\partial \tilde{t}}+\bar{U}\cdot \mathrm{grad}(U_1)=-\frac{1}{\rho_c}\frac{\partial p}{\partial \tilde{x}}+ +\mathrm{div}\left(\left(\sigma^{kin}+\sigma^{turb}\right)\mathrm{grad}\left(U_1\right)\right)+g\,; \tag{2}$$

$$\frac{\partial U_1}{\partial \tilde{t}}+\bar{U}\cdot \mathrm{grad}(U_2)=-\frac{1}{\rho_c}\frac{\partial p}{\partial \tilde{y}}+ +\mathrm{div}\left(\left(\sigma^{kin}+\sigma^{turb}\right)\mathrm{grad}\left(U_2\right)\right); \tag{3}$$

$$\int\limits_0^{h(\tilde{x})} U_1(\tilde{x},s)ds=Q\overset{def}{\equiv}\int\limits_0^{h(0)} U_1(0,s)ds,$$

$$0\le \tilde{x}\le L,\quad 0\le \tilde{y}\le h\left(\tilde{x}\right). \tag{4}$$

Здесь величина Q называется общим расходом. Для описания турбулентности мы, согласно [1], воспользуемся представлением $\sigma_c^{kin}+\sigma_c^{turb}$, причем полагая, что

$$\sigma^{kin}=\sigma_0\equiv\mathrm{const}\,,\ \sigma^{turb}=\sigma_1\left(1-\left(\frac{2\tilde{y}}{h\left(\tilde{x}\right)}-1\right)^2\right),$$

$$\sigma_1\equiv\mathrm{const}\,. \tag{5}$$

3. МЕТОД РЕШЕНИЯ

Перейдем теперь в (1) к новой системе координат, в соответствии с которой произведем замену неизвестного вектора скорости $\bar{U}$ на новый $\hat{\bar{u}} = \left(\hat{u}_1, \hat{u}_2\right)$:

$$\left.\begin{aligned} x &= \tilde{x} \\ y &= 2\frac{\tilde{y}}{h(\tilde{x})} - 1 \end{aligned}\right\}, \left.\begin{aligned} \hat{u}_1 &= U_1 \\ \hat{u}_2 &= -2\frac{\tilde{y}}{h^2}\frac{dh}{d\tilde{x}}U_1 + 2\frac{1}{h}U_2 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{aligned} U_1 &= \hat{u}_1 \\ U_2 &= \frac{(1+y)}{2}\frac{dh}{d\tilde{x}}\hat{u}_1 + \frac{h}{2}\hat{u}_2 \end{aligned}\right\}. \tag{6}$$

Следующий формальный шаг позволяет сохранить технику метода равных расходов без существенных изменений. Действительно, представим неизвестную функцию $h(x)$ как $h(x) = h_0 e^{v(x)}$, а вектор скоростей $\hat{\bar{u}}$ в виде: $\hat{\bar{u}} = e^{-v(x)}\bar{u}$. Тогда:

$$\left.\begin{aligned} U_1 &= e^{-v(x)}u_1 \\ U_2 &= \left(\frac{(1+y)}{2}\frac{dv}{dx}u_1 + \frac{1}{2}u_2\right)h_0 \end{aligned}\right\}, \ \sigma_c^{kin} + \sigma_c^{turb} =$$

$$= -\sigma_1 y^2 + \sigma_1 + \sigma_0 = \sigma_0\left(-\sigma y^2 + \sigma + 1\right), \tag{7}$$

где σ — безразмерная константа, $(x, y) \in \{0 \le x \le L, -1 \le y \le 1\}$.

Отметим, что после проведения всех необходимых тождественных преобразований (2) и (3) приобретают весьма громоздкий вид, который легко сократить, следуя классическим рассуждениям Прандтля. Однако, учитывая и широту диапазона толщин рассматриваемых в настоящее время пленок (шире того, в рамках которого корректен подход теории погранслоя), и общедоступность пакетов символьных вычислений представляется важным указать унифицированную процедуру обезразмеривания системы (1)—(4). В ее рамках отбрасывание членов с малыми коэффициентами приобретает характер четких количественных оценок. Она состоит в следующем. Для обезразмеривания получаемой системы введем число Рейнольдса $\mathrm{Re} = h_0 u_0 / \sigma_0$, безразмерный параметр $\chi = \log_{\mathrm{Re}}\left(L / h_0\right)$, а также положим, что

$$x = L\,\xi,\quad u_1 = u_0\tilde{u}_1,\quad u_2 = \frac{u_0}{L}\tilde{u}_2,\quad p = p_0\tilde{p},$$

$$G = \frac{gh_0}{u_0^2},\ P = \frac{p_0}{\rho u_0^2},$$

где знак волны означает, что указанная так функция является безразмерной. Так, для {Re = 350, $\chi > 1$}, после ряда тождественных преобразований пренебрегая членами с коэффициентами порядка малости 10^{-9} и, для упрощения записи опуская знак волны, (1), (2) и (4) преобразуются к виду:

$$\frac{\partial u_1}{\partial \xi} + \frac{\partial u_2}{\partial y} = 0\,;. \tag{8}$$

$$\begin{gathered} 4\left(\sigma\left(1 - y^2\right) + 1\right)\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} - \mathrm{Re}^{1-\chi}e^{v}u_1\frac{\partial u_1}{\partial \xi} - \\ -\left(8\sigma y + \mathrm{Re}^{1-\chi}e^{v}u_2\right)\frac{\partial u_1}{\partial y} + \mathrm{Re}^{1-\chi}e^{v}u_1^2\frac{dv}{d\xi} - \\ -P\,\mathrm{Re}^{1-\chi}e^{3v}\frac{dp}{d\xi} + \mathrm{Re}\,Ge^{3v} = 0; \end{gathered} \tag{9}$$

$$\int_{-1}^{1} u_1(x, s)\,ds = \mathrm{const}\,. \tag{10}$$

Напомним, что суть метода поверхностей равного расхода (применявшегося к (1)—(4) в рамках приближения Прандтля) состоит в выделении семейства линий тока $\left\{\tilde{y} = \tilde{y}_k\left(\tilde{x}\right)\right\}_{k=0}^{N}$, разделяющего весь поток на подпотоки, в которых расход жидкости в единицу времени для любого сечения $\tilde{x} \equiv$ $\equiv$ const остается одним и тем же (т.е. не зависит от $\tilde{x}$) [1].

Как нетрудно проверить, семейству $\left\{\tilde{y} = \tilde{y}_k\left(\tilde{x}\right)\right\}_{k=0}^{N}$ можно поставить в соответствии семейство $\left\{y_k = 2\tilde{y}_k\left(\tilde{x}\right)e^{-v(x)} - 1\right\}_{k=0}^{N}$, для которого имеет место $u_2 = \left(dy_k / dx\right)u_1$ и равенство $\frac{d}{dx}\int_{y_k(x)}^{y_{k+1}(x)} u_1(x, s)\,ds = 0$. Тем самым вся формальная часть метода поверхностей равного расхода остается неизменной и для преобразованных уравнений. Следуя [1], система (6) сводится к системе ОДУ:

$$\begin{gathered} 4\left(\sigma\left(1 - y^2\right) + 1\right)\frac{\partial^2 u_k}{\partial y_k^2} - 8\sigma y\frac{\partial u_k}{\partial y_k} + \mathrm{Re}^{1-\chi}e^{v}u_k^2\frac{dv}{d\xi} - \\ -P\,\mathrm{Re}^{1-\chi}e^{3v}\frac{dp}{d\xi} + \mathrm{Re}\,Ge^{3v} = \mathrm{Re}^{1-\chi}e^{v}u_k\frac{du_k}{d\xi}\,; \end{gathered} \tag{11}$$

$$\begin{gathered} \frac{dy_k(x)}{dx} = \frac{dy_{k-1}(x)}{dx} - \frac{\dfrac{du_k(x)}{dx} + \dfrac{du_{k-1}(x)}{dx}}{u_k(x) + u_{k-1}(x)} \times \\ \times\left(y_k(x) - y_{k-1}(x)\right), \end{gathered} \tag{12}$$

$$k = 0, 1, 2, ...N - 1,\quad y_N(x) \equiv 1,\quad u_N(x) \equiv 1\,;$$

$$\begin{gathered} 4\left(\sigma\left(1 - y^2\right) + 1\right)\frac{\partial^2 u_N}{\partial y_N^2} - 8\sigma y\frac{\partial u_N}{\partial y_N} + \mathrm{Re}^{1-\chi}e^{v}\frac{dv}{d\xi} - \\ -P\,\mathrm{Re}^{1-\chi}e^{3v}\frac{dp}{d\xi} + \mathrm{Re}\,Ge^{3v} = 0\,. \end{gathered} \tag{13}$$

Данная система недоопределена (в ней неизвестных на одно больше чем уравнений). Это недостающее уравнение можно получить следующим образом. В состав граничных условий на свободной границе, как правило, входит условие для тангенциальной составляющей $\mathrm{grad}(p)$, которая в рамках проведенных преобразований переходит в $\partial p/\partial y$. Проделаем все вышеперечисленные манипуляции с (3). Тогда рассмотрев его только на "свободной поверхности" $y_N(x)\equiv 1$ мы можем заменить в нем $\partial p/\partial y$ в соответствии с граничным условием. В случае, когда изменение величины $\partial p/\partial y$ оказывается существенным эту процедуру можно продолжить внутрь системы. Однако, как правило, для пленочного течения оно исчезающе мало и непринципиально. Поэтому вполне достаточно ограничиться случаем $(\partial p/\partial y)(x,1)=0$, приводящим к уравнению:

$$\frac{4e^{-v}}{\mathrm{Re}}\frac{dv}{dx}\frac{\partial u}{\partial y_N}+\mathrm{Re}^{-\chi}Pe^{2v}\frac{dv}{dx}\frac{dp}{dx}-\mathrm{Re}^{-\chi}\frac{d^2v}{dx^2}-$$

$$-\mathrm{Re}^{-\chi}\left(\frac{dv}{dx}\right)^2-\left(e^{2v}G+\frac{4\sigma}{\mathrm{Re}}e^{-v}\right)\frac{dv}{dx}=0, \qquad (14)$$

которое и замыкает систему (11)—(13).

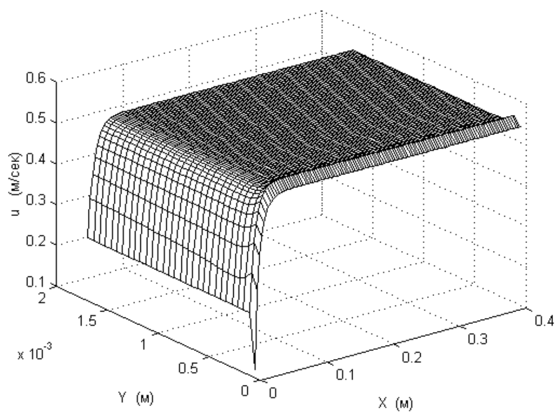

Рис. 1. График скорости

В заключение отметим, что проведенные численные эксперименты позволяют утверждать, что для многих конкретных случаев линии тока $\{y_k=y_k(x)\}_{k=1}^{N-1}$ оказываются с большой степенью точности просто параллельными вертикальными линиями. Тем самым можно вдвое сократить число равнений в системе (11)—(14).

Работа частично поддержана РФФИ № 05-03-32254.

СПИСОК ОБОЗНАЧЕНИЙ

a — температуропроводность смеси [м^2/с];
c — удельная теплоемкость смеси [Дж/кг·К];
C — концентрация вещества [моль/м^3];
D — коэффициент диффузии [м^2/с];
E — энергия активации реакции [Дж/моль];
g — ускорение свободного падения [9.8 м/с^2];
H — толщина щели, из которой поступает жидкость в реактор [м];
h — толщина стекающей пленки [м];
K — константа скорости расхода [м^3/моль·с];
L — величина всей системы вдоль оси Ox (≡ длина всей системы) [м];
p — давление [н/м^2];
Q — тепловой эффект реакции [Дж/моль];
R — универсальная газовая постоянная [8.3143 Дж/моль·К];
t — временная координата [с];
T — температура [К];
$\bar{U}=(U_1,U_2)$— скорость стекания пленки воды [м/с];
$\bar{W}=(W_1,W_2)$— скорость стекания пленки реагирующей смеси [м/с];
$\tilde{x},\tilde{y}$ — пространственные координаты [м];
δ — величина стекающей пленки вдоль оси Оy (≡ толщина пленки) [м];
λ — теплопроводность смеси [Дж/м·с·К];
ρ — плотность [кг/м^3];
σ — вязкость (кинематическая или турбулентная) [кг/м·с].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Холпанов Л.П., Шкадов В.Я.** Гидродинамика и тепломассообмен с поверхностью раздела. М.: Наука, 1990.