УДК 532.6

А. В. Десятов [1], М. Д. Диев [2], Д. Н. Морской [2], А. Н. Пономарев [1], С. Г. Черкасов [1]

Исследовательский центр им. М.В.Келдыша, Москва, Россия (1)
Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, Россия (2)

ЭВОЛЮЦИЯ ОДИНОЧНОГО ПУЗЫРЬКА ПРИ ВНЕЗАПНОМ ИЗМЕНЕНИИ ВНЕШНЕГО ДАВЛЕНИЯ В ОКРУЖАЮЩЕЙ ЖИДКОСТИ

АННОТАЦИЯ

Проведен анализ эволюции пузырька, находящегося в бесконечном объеме несжимаемой жидкости, когда выполняется политропный «закон» роста/схлопывания. Получены расчетные соотношения для скорости изменения размеров пузырька в политропном процессе при произвольном значении показателя политропы и в изотермном процессе. Проанализирован энергетический баланс, в котором учтены изменение внутренней энергии, кинетическая энергия, поверхностная энергия и работа, совершаемая силой внешнего давления. Определены пределы сжатия пузырька.

1. ВВЕДЕНИЕ

Задача об эволюции газового пузырька была впервые решена Рэлеем [1]. Постановка данной задачи сводится к тому, что рассматривается сферический газовый пузырек в безграничной жидкости. Жидкость предполагается несжимаемой и невязкой, газ – идеальным. В условиях сферической симметрии уравнения движения и неразрывности для жидкости вокруг пузырька имеют вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial r}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}\,, \tag{1}$$

$$\frac{\partial}{\partial r}(ur^2)=0\,. \tag{2}$$

Будем считать, что p_R связано с p формулой Лапласа: $p-p_R=2\sigma/R$. Если массообмен между газом и жидкостью отсутствует, то скорость жидкости на границе с пузырьком будет равна скорости перемещения границы пузырька и, интегрируя (1) с учетом (2) от $r=R$ до $r=\infty$, можно получить уравнение

$$R\frac{d^2R}{dt^2}+\frac{3}{2}\left(\frac{dR}{dt}\right)^2=\frac{1}{\rho}(p_R-p_\infty)\,. \tag{3}$$

Уравнение (3) является основой классической модели Рэлея [1] для описания гидродинамических процессов в жидкости при схлопывании сферической каверны ($p_R=p=0$).Рэлей получил из (3) аналитическую зависимость, связывающую скорость границы каверны с ее текущим радиусом:

$$\left(\frac{dR}{dt}\right)^2=\frac{2p_\infty}{3\rho}\left(\frac{R_0^3}{R^3}-1\right). \tag{4}$$

Очевидно, что в рэлеевской постановке задачи невозможно получить какую-либо информацию об изменении давления в пузырьке по мере его схлопывания. Известны попытки [2–6] модифицировать уравнение Рэлея путем введения различных поправок, учитывающих вязкость жидкости, адиабатное сжатие газа в пузырьке и т.д.

2. ПОЛИТРОПНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ «ЗАКОНА» РОСТА/СХЛОПЫВАНИЯ ПУЗЫРЬКА

Предположим, что давление в пузырьке и его объем V связаны уравнением политропы:

$$pV^\gamma=p_0V_0^\gamma\,, \tag{5}$$

где индекс «0» соответствует начальным условиям. Уравнение (5) включает в себя как частный случай адиабатное поведение газа в пузырьке (если γ – показатель адиабаты). Предположение (5) позволяет, в отличие от модели Рэлея, рассматривать не только схлопывающиеся, но и растущие пузырьки.

Используя (5) и формулу Лапласа, преобразуем уравнение (3) к виду

$$R\frac{d^2R}{dt^2}+\frac{3}{2}\left(\frac{dR}{dt}\right)^2=\frac{1}{\rho}\left(p_0\frac{R_0^3}{R^3}-\frac{2\sigma}{R}-p_\infty\right). \tag{6}$$

Несмотря на более сложный вид уравнения (6), из него, как и в модели Рэлея, можно получить аналитическую зависимость скорости границы пузырька от его текущего радиуса:

$$\begin{aligned}\frac{3\rho}{2}\left(\frac{dR}{dt}\right)^2&=p_\infty\left(\frac{R_0^3}{R^3}-1\right)+\\&+\frac{p_0}{\gamma-1}\left(\frac{R_0^3}{R^3}-\frac{R_0^{3\gamma}}{R^{3\gamma}}\right)+\frac{3\sigma}{R_0}\left(\frac{R_0^3}{R^3}-\frac{R_0}{R}\right).\end{aligned} \tag{7}$$

В предельном случае $\gamma\to1$ (изотермический процесс для газа в пузырьке) (7) переходит в формулу

$$\begin{aligned}\frac{3\rho}{2}\left(\frac{dR}{dt}\right)^2&=p_\infty\left(\frac{R_0^3}{R^3}-1\right)+\\&+3p_0\frac{R_0^3}{R^3}ln\frac{R}{R_0}+\frac{3\sigma}{R_0}\left(\frac{R_0^3}{R^3}-\frac{R_0}{R}\right).\end{aligned}$$

Отметим, что формула Рэлея является частным случаем формулы (7) при $p_0=0$, $\sigma=0$.

3. ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ БАЛАНС В ПРОЦЕССЕ ЭВОЛЮЦИИ ПУЗЫРЬКА

Рассмотрим энергетический баланс процесса адиабатного сжатия газового пузырька. Пусть в некоторый момент времени радиус пузырька равен R, а температура – T. Изменение внутренней энергии газа в пузырьке запишем с учетом уравнения состояния в виде:

$$\Delta E = \frac{4}{3}\pi R_0^3 p_0 \frac{1}{\gamma-1}\left[\left(\frac{R_0}{R}\right)^{3(\gamma-1)} - 1\right]. \qquad (8)$$

Для кинетической энергии жидкости с учетом уравнения неразрывности получим

$$K = 2\pi\rho\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 R^3. \qquad (9)$$

Складывая (8) и (9) и учитывая, что кинетическая энергия жидкости в начальный момент времени равнялась нулю, получим для изменения полной энергии системы

$$\Delta E + K = \frac{4}{3}\pi R_0^3 p_0 \frac{1}{\gamma-1}\left[\left(\frac{R_0}{R}\right)^{3(\gamma-1)} - 1\right] + 2\pi\rho\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 R^3. \qquad (10)$$

Подставляя во второе слагаемое в правой части (10) выражение (7), можно получить, что

$$\Delta E + K + 4\pi\sigma\left(R^2 - R_0^2\right) = \frac{4}{3}\pi p_\infty\left(R_0^3 - R^3\right). \qquad (11)$$

Правая часть (11) есть работа, совершенная силой внешнего давления, последнее слагаемое в левой части (11) – изменение поверхностной энергии. Отметим, что поверхностная энергия появляется в энергетическом балансе через предположение о различии давлений с различных сторон свободной поверхности, из-за чего работа, совершаемая жидкостью над пузырьком, не равна работе, совершаемой над газом в пузырьке. Разность этих работ и есть изменение поверхностной энергии.

4. АНАЛИЗ СЖАТИЯ ПУЗЫРЬКА В БЕЗРАЗМЕРНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

Для дальнейшего анализа удобно ввести следующие безразмерные переменные: $x = R_0/R$,

$$A_p = \frac{p_\infty}{p_0}, \; A_\sigma = \frac{\sigma}{R_0 p_0}, \; f = \frac{3\rho}{2p_0}\left(\frac{dR}{dt}\right)^2.$$

В безразмерных переменных основная формула (7) принимает вид

$$f(x) = A_p\left(x^3 - 1\right) + \frac{1}{\gamma-1}\left(x^3 - x^{3\gamma}\right) + 3A_\sigma\left(x^3 - x\right). \qquad (12)$$

Рассмотрим процесс сжатия пузырька. В модели Рэлея скорость движения границы каверны монотонно увеличивается при уменьшении ее радиуса и стремится к бесконечности при стремлении ее радиуса к нулю. Формуле (12) при $\gamma > 1$ соответствует картина, показанная на рис. 1 для $A_p = 2$ и показателя адиабаты, изменяющегося от максимального значения $\gamma = 5/3$ (адиабатный процесс в одноатомном газе) до минимального значения $\gamma = 1$ (изотермный процесс). Кривые на рис. 1 построены для случая, когда окружающей пузырь жидкостью является вода при $T = 293$ К и $p_0 = 1{,}013 \cdot 10^5$ Па; при этих условиях $A_\sigma = 7{,}176 \cdot 10^{-3}$, когда $R_0 = 10^{-4}$ м.

На рис. 2 показано, как изменяется f в зависимости от A_σ. Из рис. 2 видно, что по мере уменьшения A_σ влияние этого параметра вырождается.

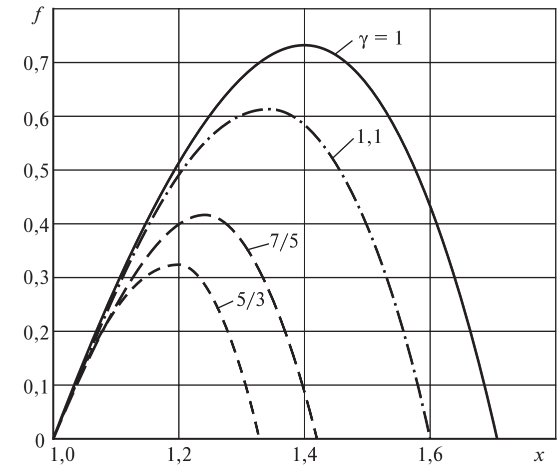

Рис. 1. Влияние значения показателя адиабаты на функцию f при $A_p = 2$

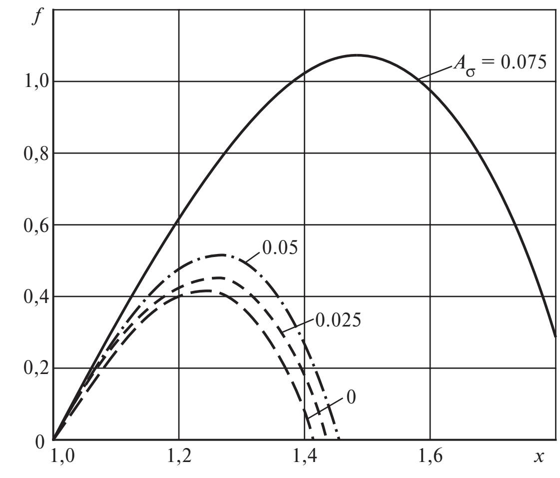

Рис. 2. Влияние величины A_σ на функцию f при значении показателя адиабаты $\gamma = 1{,}4$

На начальном этапе, как и в модели Рэлея, скорость движения границы пузырька растет при уменьшении его радиуса, т.е. при увеличении x. При некотором значении R давление в пузырьке становится равным давлению p_∞. Однако R продолжает уменьшаться, несмотря на то, что давление в пузырьке уже превышает внешнее давление. Очевидно, что это связано с инерцией жидкости, которая продолжает двигаться к центру, хотя силы давления направлены уже в противоположную сторону. На этом этапе процесса скорость движения границы уже не растет, а уменьшается с уменьшением радиуса. Наконец, при некотором значении R скорость движения границы пузырька становится равной нулю. Из уравнения неразрывности следует, что при этом становится равной нулю скорость жидкости во всем объеме. Таким образом, в рамках принятой постановки состояние системы в данный момент времени эквивалентно начальным условиям в задаче о расширении пузырька при понижении давления в окружающей жидкости. Поэтому ясно, что в дальнейшем пузырек будет расширяться.

Нулевому значению скорости соответствует минимальное значение радиуса $R_{\min} = R_0 / x_{\max}$, которое определяется из условия равенства нулю правой части уравнения (12):

$$A_p \left(x_{\max}^3 - 1\right) + \frac{1}{\gamma - 1}\left(x_{\max}^3 - x_{\max}^{3\gamma}\right) +$$
$$+3A_\sigma \left(x_{\max}^3 - x_{\max}\right) = 0.$$

Если минимальный радиус пузырька намного меньше начального радиуса, то эту формулу можно записать в приближенной форме:

$$A_p x_{\max}^3 + \frac{1}{\gamma - 1}\left(x_{\max}^3 - x_{\max}^{3\gamma}\right) + 3A_\sigma x_{\max}^3 \approx 0 .$$

Отсюда можно получить:

$$\frac{R_{\min}}{R_0} = x_{\max}^{-1} \approx \left[1 + (\gamma - 1)\left(A_p + 3A_\sigma\right)\right]^{\frac{1}{3(1-\gamma)}} .$$

При минимальном радиусе давление в пузырьке имеет максимальное значение

$$p_{\max} = p_0 \frac{R_0^{3\gamma}}{R_{\min}^{3\gamma}} .$$

Тогда

$$\frac{p_{\max}}{p_0} \approx \left[1 + (\gamma - 1)\left(A_p + 3A_\sigma\right)\right]^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} . \qquad (13)$$

5. ЭВОЛЮЦИЯ ПУЗЫРЬКА ПЕРЕМЕННОЙ МАССЫ

До сих пор предполагалось, что масса газа в пузырьке неизменна. В случае парового пузырька масса будет переменна из-за фазового перехода на поверхности раздела. При отсутствии фазовых переходов скорость жидкости на границе пузырька совпадает со скоростью перемещения самой границы, и это обстоятельство использовалось выше при выводе некоторых формул. При конденсации или испарении эти скорости различны. Однако, если данным эффектом пренебречь, приведенные формулы можно использовать для анализа эволюции и газовых, и паровых пузырьков. При этом γ можно рассматривать как величину, характеризующую интенсивность теплообмена в рассматриваемой системе. Например, когда $\gamma = \gamma_a$, теплообмен между газовым пузырьком и окружающей жидкостью отсутствует. В противоположном предельном случае, когда интенсивность теплообмена между газом и жидкостью, а также скорость распространения теплоты в жидкости предельно велики, температура газа в пузырьке и температура окружающей жидкости будут неизменными и равными начальной температуре системы, что соответствует показателю политропы, равному единице. Наконец, в случае парового пузырька и предельно высокой интенсивности теплообмена из постоянства температуры вытекает и постоянство давления (т.к. они связаны кривой насыщения), что соответствует $\gamma = 0$ в формуле (5). Таким образом, изменению интенсивности теплообмена можно грубо поставить в соответствие изменение показателя политропы в пределах от 1 до показателя адиабаты (газовый пузырек) и от 0 до показателя адиабаты (паровой пузырек). Иллюстрирует сказанное график, показанный на рис. 3.

6. ПРЕДЕЛЫ СЖАТИЯ ПУЗЫРЬКА

Рассмотрим вопрос о пределах сжатия пузырька. Введем обозначение:

$$\varphi(x) = \frac{df}{dx} =$$
$$= 3\left[A_p x^2 + \frac{x^2}{\gamma - 1}\left(1 - \gamma x^{3\gamma - 3}\right) + A_\sigma \left(3x^2 - 1\right)\right]. \qquad (14)$$

Отметим, что при сжатии $x \geq 1$ и $A_p > 1$.

Пузырек, заполненный газом, не растворяющимся в жидкости, не может окончательно исчезнуть (схлопнуться). Это означает, что при $1 \leq \gamma \leq \gamma_a$ пузырек может быть сжат только до некоторого минимального размера, который определяется из условия $f(x) = 0$. С другой стороны, при $\gamma = 0$ (случай постоянного давления в пузырьке) f согласно (12) монотонно растет с уменьшением радиуса пузырька. С учетом начального условия $f(0) = 0$ это означает, что уравнение $f(x) = 0$ не имеет решений при $x \neq 1$ и пузырек в конечном итоге схлопнется. Таким образом, в рамках рассматриваемой модели возможны два варианта развития событий, как показано на рис. 2.

В начальный момент времени $x = 1$ и $f = 0$. Поэтому с увеличением x функция f сначала растет и ее производная $\varphi > 0$. Если сжатие пузырька будет продолжаться только до конечного значения $x_{\max}$, при котором f должно опять обратиться в нуль, то при некотором значении x $(1 < x < x_{\max})$ f должно достигать максимума и далее уменьшаться, а величина x должна определиться из условия $\varphi(x) = 0$. Используя (14), запишем это условие в виде

$$A_p + A_\sigma \left(3 - x^{-2}\right) + \frac{1}{\gamma - 1} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} x^{3\gamma - 3} . \qquad (15)$$

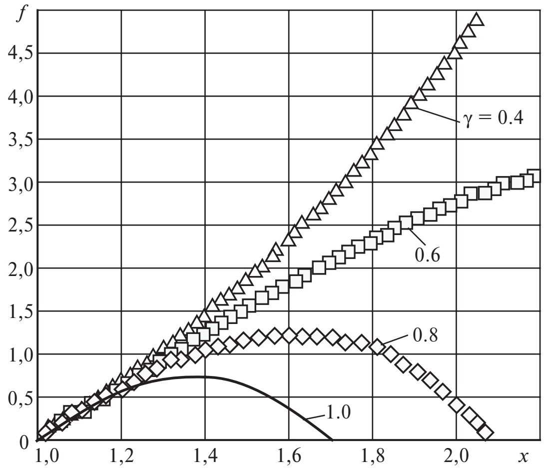

Рис. 3. Влияние значения показателя адиабаты при $\gamma \le 1$ на функцию f при $A_p = 2$

Отметим, что при $\gamma > 1$ (газовый пузырек) правая часть (15) и все слагаемые в левой его части положительны, т.е. уравнение имеет решение при любых значениях A_p и A_σ. В случае же $\gamma < 1$ (паровой пузырек) правая часть (15) будет всегда отрицательна, а левая часть может быть как отрицательной, так и положительной. Если левая часть (15) положительна, то уравнение (15) не может быть выполнено. Это означает, что зависимость скорости границы пузырька от его радиуса имеет монотонный характер и пузырек будет схлопываться. Легко убедиться, что такая ситуация будет иметь место, если выполнено неравенство

$$A_p + 2A_\sigma > \frac{1}{1-\gamma}. \qquad (16)$$

Если не учитывать влияние поверхностного натяжения ($A_\sigma = 0$), то неравенство (16) показывает, что для схлопывания парового пузырька требуется приложить достаточно большое внешнее давление, причем это давление увеличивается при увеличении γ, т.е. при уменьшении интенсивности теплообменных процессов. Неравенство (16) отражает также то обстоятельство, что из-за поверхностного натяжения необходимое внешнее давление уменьшается, поскольку недостаток внешнего давления компенсируется лапласовским давлением.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основой проведенного анализа является формула (7), которая является точным решением в рамках принятой постановки задачи и обобщает известную формулу Рэлея за счет учета поверхностного натяжения и учета изменения давления в пузырьке, описываемом уравнением политропы. Предположение о политропной связи между давлением и объемом пузырька удобно тем, что позволяет исключить из расчета необходимость вычисления температурного поля в жидкости, однако с физической точки зрения оно представляет собой довольно грубое упрощение реальных процессов. Тем не менее, как показывают полученные выше результаты, принятая упрощенная модель отслеживает основные закономерности и может оказаться полезной для анализа на качественном уровне.

Приведенные материалы получены при поддержке РФФИ (гранты 05-08-01288-а и 05-08-18004-а).

СПИСОК ОБОЗНАЧЕНИЙ

c_v – удельная изохорная теплоемкость, Дж/(кг·К);
m – масса газа в пузырьке, кг;
p – давление в пузырьке, Па;
p_R – давление в жидкости на границе пузырька;
$p_\infty = \text{const}$ – давление в жидкости на бесконечном удалении от пузырька, Па;
r – координата, м;
$R(t)$ – радиус пузырька, м;
R_0 – начальный радиус пузырька, м;
R_g – газовая постоянная, Дж/(кг·К);
t – время, с;
T – температура, К;
u – скорость, м/с;
γ – показатель степени в (5);
γ_a – показатель адиабаты;
ρ – плотность жидкости, кг/м^3;
σ – поверхностное натяжение, Н/м.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Rayleigh, Lord.** On the pressure developed in a liquid during the collapse of a spherical cavity// Phil. Mag. 1917. Vol. 34. P. 94 – 98.
2. **http://caltechbook.library.caltech.edu/1/00/content.htm (Internet edition:** Brennen C.E. **Cavitation and bubble dynamics. Oxford University Press, 1995).**
3. **Накоряков В.Е., Покусаев Б.Г., Шрейбер И.Р.** Волновая динамика газо- и парожидкостных сред. М.: Энергоатомиздат, 1990. 248 с.
4. **Нигматулин Р.И.** Динамика многофазных сред. Ч. I. М.: Наука, 1987. 464 с.
5. **Седов Л.И.** Механика сплошной среды. Т. 1. М.: Наука, 1973. 536 с.
6. **Кнэпп Р., Дейли Дж., Хэммит Ф**. Кавитация. М.: Мир, 1974. 688 с.