УДК 658.26(075.8)

И.Г. Дроздов, Н.Н. Кожухов, Э.Р. Габасова

Воронежский государственный технический университет, Россия

МОДЕЛИРОВАНИЕ ГИДРОДИНАМИКИ ТЕЧЕНИЯ ОХЛАДИТЕЛЯ В ПОРИСТОМ ЭЛЕМЕНТЕ С КРИВОЛИНЕЙНОЙ ГРАНИЦЕЙ

АННОТАЦИЯ

Представлена математическая модель гидродинамики течения охладителя в пористом элементе, учитывающая геометрию внешних границ. Рассмотрены пористые элементы с разнесенными коллекторами разного типа, произведен вычислительный эксперимент, определено распределение полей давления и скорости в пористом элементе с криволинейной границей.

1. ВВЕДЕНИЕ

Основные тенденции развития энергетики, с одной стороны, характеризуются применением высококалорийных топливных компонентов, таких как метан, водород, кислород, с другой — интенсификацией процессов тепломассообмена. Все это связано с повышением тепловых нагрузок на различные элементы энергетических систем. В связи с этим важной проблемой является обеспечение надежного охлаждения теплонапряженных узлов энергоустановок при их функционировании. Эффективным методом тепловой защиты является охлаждение на базе пористых теплообменных элементов с применением разнесенных коллекторов. Часто при моделировании гидродинамики в ПТЭ не учитывается форма их внешних границ, что может приводить к неизбежной ошибке при проектировании систем охлаждения на основе пористых элементов.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим решение задачи об определении полей давления и скорости в пористом элементе с криволинейной границей. Физические области решения для различного типа разнесенных коллекторов представлены на рис. 1, 2. Через входной коллектор HD осуществляется подвод охладителя, через выходной AB — отвод. Шпунт BCGH и горизонтальная интенсифицирующая перегородка BH непроницаема для охладителя. Область ПТЭ имеет криволинейную границу FE.

При рассмотрении задачи был принят ряд допущений:

- пористая матрица изотропна с одинаковым по всем направлениям коэффициентом проницаемости;
- на стенках ПТЭ отсутствует эффект прилипания;
- фильтрующаяся среда — несжимаемая жидкость.

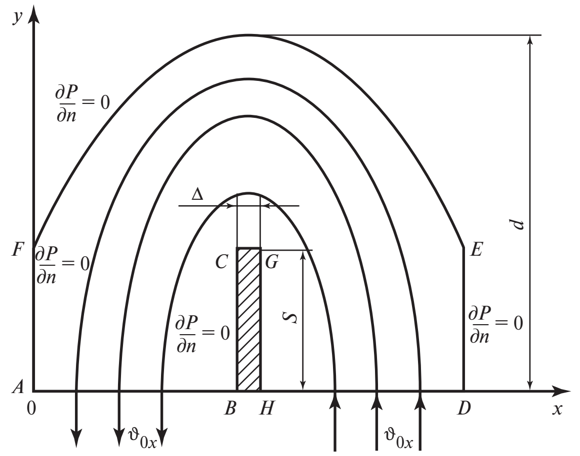

Рис. 1. Схема физической области течения охладителя в ПТЭ с разнесенным коллектором типа шпунта

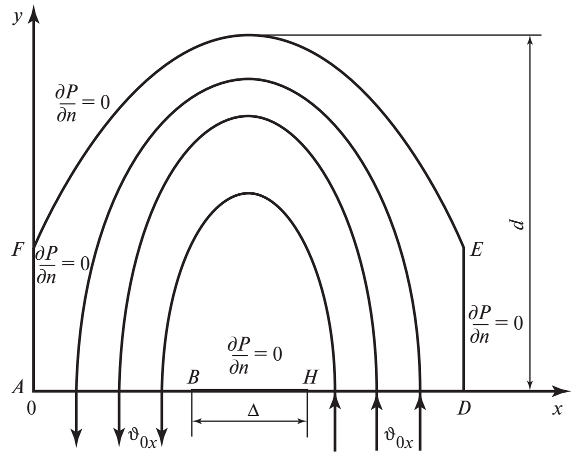

Рис. 2. Схема физической области течения охладителя в ПТЭ с разнесенным коллектором типа горизонтальной интенсифицирующей перегородки

3. ПОСТРОЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

Аналитическая теория нестационарной фильтрации в пористом теле с использованием двучленного закона базируется на следующем уравнении [1]:

$$\rho\frac{\partial\vec{\vartheta}}{\partial\tau}=-\mathrm{grad}P-\left(\alpha\mu\vartheta+\beta\rho\vartheta^2\right)\frac{\vec{\vartheta}}{\vartheta}, \quad (1)$$

где ρ — плотность охладителя, кг/м^3; $\vec{\vartheta}$ — вектор скорости, м/с; τ — время, с; P — давление, Па; α — вязкостный член сопротивления пористой среды, 1/м^2; β — инерционный член сопротивления пористой среды, 1/м^2; μ — коэффициент динамической вязкости, кг/(м·с); $\vartheta = \sqrt{\vartheta_x^2 + \vartheta_y^2}$ — модуль вектора скорости, м/с;

Преобразуя уравнение (1), запишем его в проекциях на оси x и y:

$$\rho \frac{\partial \vartheta_x}{\partial \tau} = -\frac{\partial P}{\partial x} - (\alpha\mu + \beta\rho\vartheta)\vartheta_x ; \quad (2)$$

$$\rho \frac{\partial \vartheta_y}{\partial \tau} = -\frac{\partial P}{\partial y} - (\alpha\mu + \beta\rho\vartheta)\vartheta_y . \quad (3)$$

Для замыкания системы (2)—(3) рассмотрим уравнение неразрывности для двумерной системы координат [1]

$$\frac{\partial \vartheta_x}{\partial x} + \frac{\partial \vartheta_y}{\partial y} = 0 . \quad (4)$$

Продифференцировав (2) по x, а (3) по y, а затем, сложив полученные уравнения с учетом (4), получим:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = -\beta\rho\left(\vartheta_x \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + \vartheta_y \frac{\partial \vartheta}{\partial y}\right). \quad (5)$$

Приведем уравнения (2), (3) и (5) к безразмерному виду введением следующих переменных: $P^* = \frac{P}{P_0}$, $x^* = \frac{x}{d}$, $y^* = \frac{y}{d}$, $\tau^* = \frac{\tau}{\tau_0}$, $\vartheta_x^* = \frac{\vartheta_x}{\vartheta_0}$, $\vartheta_y^* = \frac{\vartheta_y}{\vartheta_0}$, $\vartheta = \frac{\vartheta}{\vartheta_0}$, где P_0 — характерное давление для данного ПТЭ, Па; d — характерный размер, м; τ_0 — характерное время стабилизации процесса для данного ПТЭ, с; ϑ_0 — характерная скорость для данного ПТЭ, м/с.

После преобразований получим:

$$\frac{\partial \vartheta_x^*}{\partial \tau^*} = A\frac{\partial P^*}{\partial x^*} + B\vartheta_x^* + C\vartheta^*\vartheta_x^* ; \quad (6)$$

$$\frac{\partial \vartheta_y^*}{\partial \tau^*} = A\frac{\partial P^*}{\partial y^*} + B\vartheta_y^* + C\vartheta^*\vartheta_y^* ; \quad (7)$$

$$\frac{\partial^2 P^*}{\partial \left(x^*\right)^2} + \frac{\partial^2 P^*}{\partial \left(y^*\right)^2} = -\frac{C}{A}\left[\vartheta_x^* \frac{\partial \vartheta^*}{\partial x^*} + \vartheta_y^* \frac{\partial \vartheta^*}{\partial y^*}\right], \quad (8)$$

где $A = -\frac{P_0\tau_0}{d\rho\vartheta_0}$; $B = -\frac{\alpha\mu\tau_0}{\rho}$; $C = -\beta\tau_0\vartheta_0$.

Применим преобразование координат общего вида для отображения физической области на вычислительную область [2]. Для получения равномерной сетки в вычислительной области выберем границу FE в качестве границы вычислительной плоскости. Таким образом, получим сетку с равномерным распределением узлов в вычислительной области.

Преобразование, связывающее физическую и вычислительную области, зададим следующим образом:

$$\xi = \xi(x, y), \; \eta = \eta(x, y). \quad (9)$$

После преобразования системы уравнений (6)—(8) при переходе от физических координат x, y к координатам в вычислительной плоскости ξ, η при помощи правила дифференцирования сложной функции получим:

$$\frac{\partial \vartheta_x^*}{\partial \tau^*} = A\left(\frac{\partial P^*}{\partial \xi}\xi_x + \frac{\partial P^*}{\partial \eta}\eta_x\right) + B\vartheta_x^* + C\vartheta^*\vartheta_x^* ; \quad (10)$$

$$\frac{\partial \vartheta_y^*}{\partial \tau^*} = A\left(\frac{\partial P^*}{\partial \xi}\xi_y + \frac{\partial P^*}{\partial \eta}\eta_y\right) + B\vartheta_y^* + C\vartheta^*\vartheta_y^* ; \quad (11)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial P^*}{\partial \tau^*} &= \xi_y^2 \frac{\partial^2 P^*}{\partial \xi^2} + \xi_{yy}\frac{\partial P^*}{\partial \xi} + \eta_y^2 \frac{\partial^2 P^*}{\partial \eta^2} + \\ &+ \eta_{yy}\frac{\partial P^*}{\partial \eta} + \xi_x^2 \frac{\partial^2 P^*}{\partial \xi^2} + \xi_{xx}\frac{\partial P^*}{\partial \xi} + \eta_x^2 \frac{\partial^2 P^*}{\partial \eta^2} + \\ &+ \eta_{xx}\frac{\partial P^*}{\partial \eta} + 2\left(\xi_x\eta_x + \xi_y\eta_y\right)\frac{\partial^2 P}{\partial \xi \partial \eta} + \\ &+ \frac{C}{A}\left[\vartheta_x^*\xi_x \frac{\partial \vartheta^*}{\partial \xi} + \vartheta_y^*\left(\vartheta_x^*\eta_x + \vartheta_y^*\eta_y\right)\frac{\partial \vartheta^*}{\partial \eta}\right].\end{aligned} \quad (12)$$

Система уравнений (10)—(12) описывает распределение скоростей и давлений в пористом элементе в координатах ξ, η и решается в вычислительной плоскости. При этом связь между координатами в физической и вычислительной плоскостях задают метрические коэффициенты преобразования:

$$\xi_x = \frac{\partial \xi}{\partial x}, \; \xi_y = \frac{\partial \xi}{\partial y}, \; \eta_x = \frac{\partial \eta}{\partial x}, \; \eta_y = \frac{\partial \eta}{\partial y},$$

$$\xi_{xx} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}, \; \xi_{yy} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2}, \; \eta_{xx} = \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}, \; \eta_{yy} = \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2}.$$

Построим сетку для расчета полей скорости и давления в пористом элементе. Пусть положение границы FE задается некоторой функцией $y(x)$ на отрезке $a \le x \le b$. Сетку легко построить, выбирая постоянным шагом по координате x и деля каждый отрезок между AD и FE на одинаковое количество частей. Это описывается следующими зависимостями:

$$\xi = x, \; \eta = y / y_{\max}, \quad (13)$$

где $y_{\max}(x)$ — уравнение границы FE. При этом значения x и y находим по заданным значениям ξ, η.

В результате расчета производных ξ_x, ξ_y, ξ_{xx}, ξ_{yy}, η_x, η_y, η_{xx}, η_{yy} можно получить выражения для расчета метрических коэффициентов преобразования.

Граничные условия для давления на стенках определяем из выражения [3]

$$\vec{n}\vec{\nabla}P^* = 0 . \quad (14)$$

Разложив вектор нормали и $\vec{\nabla}P^*$ на оси x, y, получим:

$$\frac{N_x \dfrac{\partial P^*}{\partial x^*} + N_y \dfrac{\partial P^*}{\partial y^*}}{\sqrt{N_x^2 + N_y^2}} = 0\,. \tag{15}$$

Так как $\eta(x, y) = 1$ на границе FE, то $\vec{N} = (\eta_x, \eta_y)$. Применяя правило дифференцирования сложной функции и преобразовав, получаем:

$$\left.\left[\left(\eta_x^2 + \eta_y^2\right)\frac{\partial P^*}{\partial \eta} + \left(\xi_x\eta_x + \xi_y\eta_y\right)\frac{\partial P^*}{\partial \xi}\right]\right|_{\xi=1} = 0\,. \tag{16}$$

Для границ AF и DE граничные условия определяются уравнением (15) при условии, что $N_y \dfrac{\partial P^*}{\partial y^*} = 0$. Тогда

$$\left.\left(\eta_x \frac{\partial P^*}{\partial \eta} + \xi_x \frac{\partial P^*}{\partial \xi}\right)\right|_{\xi=0,\, \xi=AD} = 0\,. \tag{17}$$

Составим дискретизированные аналоги уравнений (10)—(12) и граничных условий (16), (17).

Для этого применим метод центральных разностей. Заменим в уравнениях (10)—(12), (16), (17) частные производные по переменным ξ, η и τ конечными разностями [2]. Преобразовав, получим:

— дискретизированные уравнения для поля скоростей

$$\begin{aligned} \vartheta^{*\,n+1}_{x\,i,j} &= \vartheta^{*\,n}_{x\,i,j} + \frac{A\xi_x\Delta\tau^*}{2\Delta\xi}\left(P^{*\,n}_{i+1,j} - P^{*\,n}_{i-1,j}\right) + \\ &+ \frac{A\eta_x\Delta\tau^*}{2\Delta\eta}\left(P^{*\,n}_{i,j+1} - P^{*\,n}_{i,j-1}\right) + B\vartheta^{*\,n}_{x\,i,j} + \\ &+ C\Delta\tau^*\vartheta^{*\,n}_{i,j}\vartheta^{*\,n}_{x\,i,j}, \end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned} \vartheta^{*\,n+1}_{y\,i,j} &= \vartheta^{*\,n}_{y\,i,j} + \frac{A\xi_y\Delta\tau^*}{2\Delta\xi}\left(P^{*\,n}_{i+1,j} - P^{*\,n}_{i-1,j}\right) + \\ &+ \frac{A\eta_y\Delta\tau^*}{2\Delta\eta}\left(P^{*\,n}_{i,j+1} - P^{*\,n}_{i,j-1}\right) + B\Delta\tau^*\vartheta^{*\,n}_{y\,i,j} + \\ &+ C\Delta\tau^*\vartheta^{*\,n}_{i,j}\vartheta^{*\,n}_{y\,i,j}; \end{aligned} \tag{19}$$

— дискретизированное уравнение для поля давления

$$\begin{aligned} P^{*\,n+1}_{i,j} &= P^{*\,n}_{i,j} + \frac{\Delta\tau^*\left(\xi_x^2 + \xi_y^2\right)}{\Delta\xi^2}\left(P^{*\,n}_{i+1,j} - 2P^{*\,n}_{i,j} + P^{*\,n}_{i-1,j}\right) + \frac{\Delta\tau^*\left(\xi_{xx} + \xi_{yy}\right)}{2\Delta\xi}\left(P^{*\,n}_{i+1,j} - P^{*\,n}_{i-1,j}\right) + \\ &+ \frac{\Delta\tau^*\left(\eta_x^2 + \eta_y^2\right)}{\Delta\eta^2}\left(P^{*\,n}_{i,j+1} - 2P^{*\,n}_{i,j} + P^{*\,n}_{i,j-1}\right) + \frac{\Delta\tau^*\left(\eta_{xx} + \eta_{yy}\right)}{2\Delta\eta}\left(P^{*\,n}_{i,j+1} - P^{*\,n}_{i,j-1}\right) + \\ &+ \frac{\Delta\tau^*\left(\xi_x\eta_x + \xi_y\eta_y\right)}{\Delta\xi}\left(\frac{P^{*n}_{i+1,j+1} - P^{*n}_{i+1,j-1}}{2\Delta\eta} - \frac{P^{*n}_{i-1,j+1} - P^{*n}_{i-1,j-1}}{2\Delta\eta}\right) + \\ &+ \frac{\Delta\tau^* C}{A}\left[\vartheta^{*\,n}_{x\,i,j}\frac{\xi_x}{2\Delta\xi}\left(\vartheta^{*\,n}_{i+1,j} - \vartheta^{*\,n}_{i-1,j}\right) + \vartheta^{*\,n}_{y\,i,j}\frac{1}{2\Delta\eta}\left(\eta_x\vartheta^{*\,n}_{x\,i,j} + \eta_y\vartheta^{*\,n}_{y\,i,j}\right)\left(\vartheta^{*\,n}_{i,j+1} - \vartheta^{*\,n}_{i,j-1}\right)\right]. \end{aligned} \tag{20}$$

Для дискретизации граничного условия (16) на границе FE будем использовать уравнение, основанное на разностях назад,

$$\frac{\partial P^*}{\partial \eta} = \frac{P^{*n}_{i,j} - P^{*n}_{i,j-1}}{\Delta\eta}\,. \tag{21}$$

Подставив (21) в (16) и преобразовав, получим дискретизированное уравнение для граничного условия на FE:

$$\begin{aligned} P^{*n}_{i,Ny} &= P^{*n}_{i,Ny-1} + \frac{\eta_x\Delta\eta}{2\Delta\xi\left(\eta_x^2 + \eta_y^2\right)} \times \\ &\times \left(P^{*n}_{i-1,Ny} - P^{*n}_{i+1,Ny}\right). \end{aligned} \tag{22}$$

С помощью уравнений, основанных на разностях назад и вперед, получим дискретизированные уравнения для граничных условий на AF и DE:

$$P^{*n}_{1,j} = \frac{\eta_x\Delta\xi P^{*n}_{1,j+1} + \Delta\eta P^{*n}_{2,j}}{\eta_x\Delta\xi + \Delta\eta}\,, \tag{23}$$

$$P^{*n}_{Nx,j} = \frac{\eta_x\Delta\xi P^{*n}_{Nx,j-1} + \Delta\eta P^{*n}_{Nx-1,j}}{\eta_x\Delta\xi + \Delta\eta}\,. \tag{24}$$

Таким образом, используя (18)—(20), (22)—(24), можно решить задачу об определении поля давлений и скоростей в пористом элементе.

4. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

Для приведенного метода были составлены две программы в MatLab [4]. В первой программе производится построение расчетной сетки. Во второй программе производится расчет значений давления и скорости в пористом элементе. В программе работают два основных цикла. Первый — определяющий значения скоростей в ПТЭ, второй — значения давлений. В связи с допущением о несжимаемости жидкости, давление рассчитывается во внутреннем цикле основного цикла итерационным методом на установление. По окончании производится расчет граничных условий для давления. Затем рассчитываются скорости охладителя в ПТЭ и производится расчет граничных условий для скоростей. На каждом шаге по времени можно наблюдать графики распределения давления и скорости в пористом элементе, которые представлены на рис. 3—6.

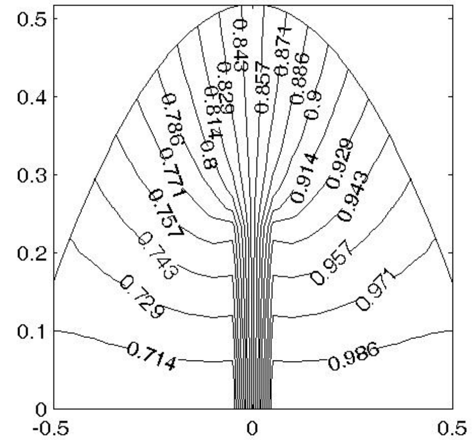

Рис. 3. Распределение поля давления для ПТЭ с разнесенным коллектором типа шпунт

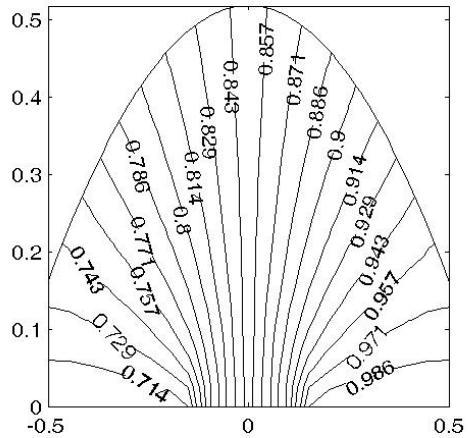

Рис. 4. Распределение поля давления для ПТЭ с горизонтальной интенсифицирующей перегородкой

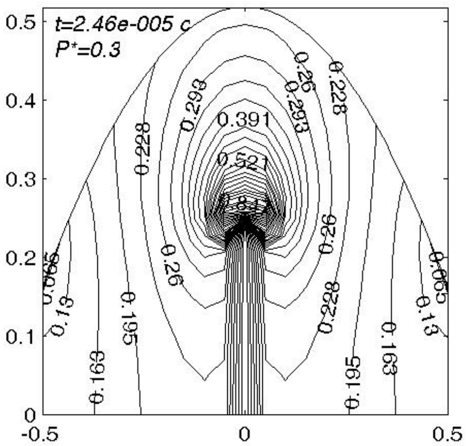

Рис. 5. Распределение поля скорости в пористом элементе. Охладитель — вода. τ* = 20. s = 0,0025

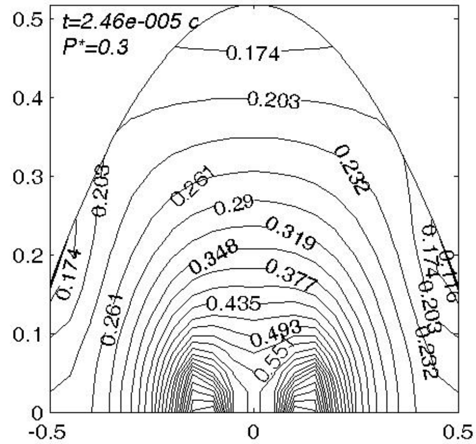

Рис. 6. Распределение поля скоростей для ПТЭ с горизонтальной интенсифицирующей перегородкой

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Из вычислительного эксперимента следует, что разработанный метод является универсальным при расчете полей давления и скоростей для различных охладителей. Для сходимости решения системы необходимо выбирать такие физические характеристики охладителя, чтобы коэффициенты A и B были близки к единице, а коэффициент C имел наименьшее значение в системе уравнений (6)—(8).

Применение горизонтальной интенсифицирующей перегородки приводит к более равномерному распределению давления охладителя в ПТЭ. В ПТЭ со шпунтом наблюдается интенсификация течения охладителя вблизи криволинейной границы, что может оказаться эффективнее в случае, когда область с криволинейной границей подвергается нагреву.

СПИСОК ОБОЗНАЧЕНИЙ

ПТЭ — пористый теплообменный элемент;
Nx — количество узлов расчетной сетки по оси x;
Ny — количество узлов расчетной сетки по оси y.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Фалеев В.В., Дроздов И.Г., Коновалов Д.А.** Численное моделирование нестационарного тепломассообмена в пористых средах при наличии локальных зон // Тр. XIII Школы-семинара молодых ученых и специалистов под рук. акад. РАН А.И. Леонтьева. В 2-х т. Т.2. М.: Издательство МЭИ, 2001. С. 46—49.
2. **Вычислительная** гидромеханика и теплообмен / Д. Андерсон, Дж. Танехилл, Р. Плетчер М.: Мир, 1990. Т. 2. 384 с.
3. **Справочник** по математике (для научных работников и инженеров). Определения, теоремы, формулы / Г. Корн, Т. Корн. — 6-е изд. СПб.: «Лань», 2003. 832 с.
4. **Ануфриев И.Е.** Самоучитель MatLab 5.3/6.x. СПб.: БХВ-Петербург, 2004. 736 с.