

АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ДЛЯ ПОЛЯ СКОРОСТЕЙ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ ПРИ СОВМЕСТНОМ ДЕЙСТВИИ ВЫНУЖДЕННОЙ И СВОБОДНОЙ КОНВЕКЦИИ В АНИЗОТРОПНОЙ ПОРИСТОЙ СТРУКТУРЕ

АННОТАЦИЯ

Аналитически решена задача определения поля скорости, создаваемого силами плавучести, при движении теплоносителя через цилиндрическое анизотропное пористое тело, в котором действуют источники тепловыделения, изменяющиеся по радиусу по параболическому закону.

Полученное решение использовалось для тестирования в части описания эффектов естественной конвекции программного комплекса ТРЕТОН, предназначенного для теплогидравлических расчетов активных зон реакторов типа ВВЭР.

1. ВВЕДЕНИЕ

В активных зонах (АЗ) современных ядерно-энергетических установок, составленных из безчеловых сборок тепловыделяющих элементов, неравномерность температур по радиусу АЗ, обусловленная неравномерным по радиусу тепловыделением, индуцирует замкнутые естественно-конвективные течения, которые, накладываясь на осевой поток теплоносителя, приводят к перераспределению продольной скорости. Целью работы было получить **аналитическое** решение **модельной** задачи, приближенной к условиям теплового режима в АЗ.

2. АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ

2.1. Постановка задачи

В активной зоне высотой l , радиусом r_0 , действуют неравномерно распределенные по r источники тепловыделения $q_v(r)$.

На вход в активную зону поступает жидкость с температурой $t_{ж}$. Давление жидкости во входном и выходном коллекторах поддерживаются постоянными. Поля скоростей и температур принимаются стационарными и осесимметричными.

Необходимо оценить возмущения, вносимые в поля скорости и температуры, обусловленные действием сил плавучести при зависимости плотности от температуры. Остальные физические параметры жидкости полагаем постоянными.

При переменной плотности теплоносителя удобнее решать задачу относительно массовой скорости $\vec{m} = \rho \vec{U}$, а не просто скорости. В терминах массовой скорости и избыточной температуры ($\vartheta = t(r, z) - t_{ж}$) уравнения движения и теплопере-

носа в приближении модели пористой среды имеют вид:

$$\nabla_r \frac{m_r^2}{\rho} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{m_r m_z}{\rho} = -\frac{\partial P}{\partial r} + \mu \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \nabla_r \frac{m_r}{\rho} \right\} - k_{rr} m_r, \quad (1)$$

$$\nabla_r \frac{m_z m_r}{\rho} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{m_z^2}{\rho} = -\frac{\partial P}{\partial z} - \rho g + \mu \nabla_r \left(\frac{\partial m_z}{\partial r} \right) - k_{zz} m_z, \quad (2)$$

$$\nabla_r m_r + \frac{\partial}{\partial z} m_z = 0, \quad (3)$$

$$\nabla_r m_r c \vartheta + \frac{\partial}{\partial z} m_z c \vartheta = \lambda \nabla_r \frac{\partial \vartheta}{\partial r} + q_v, \quad (4)$$

$$k_{zz} = \lambda_{\text{TPz}} \frac{m}{2\rho d_{\Gamma}}, \quad k_{rr} = \lambda_{\text{TPr}} \frac{m}{2\rho d_{\Gamma}}. \quad (5)$$

При записи уравнений (1), (2) и (4) мы пренебрегли вторыми производными по z , т.е. гидродинамическую и тепловую задачу решаем в параболическом приближении. При этом граничные условия по z задаются только на входе в активную зону. В уравнениях (1—4) все члены поделены на постоянную пористость структуры ε , при этом μ и λ являются приведенными эффективными коэффициентами вязкости и теплопроводности теплоносителя. В (5) λ_{TPz} и λ_{TPr} — коэффициенты гидравлического сопротивления при чисто продольном и чисто поперечном обтекании сборок стержней, m — полная массовая скорость $m = \sqrt{m_z^2 + m_r^2}$; d_{Γ} — гидравлический диаметр межстержневого пространства.

Граничными условиями для задачи являются:

$$P(z=0) = P_{\text{вх}}, \quad (6)$$

$$P(z=l) = P_{\text{вых}}, \quad (7)$$

$$\vartheta(z=0) = 0, \quad (8)$$

$$\left. \frac{\partial t}{\partial r} \right|_{r=r_0} = 0, \quad (9)$$

$$\left. \frac{\partial P}{\partial r} \right|_{r=r_0} = 0. \quad (10)$$

Задачу (1)—(10) будем решать методом малых возмущений. В качестве возмущающего фактора будем рассматривать зависимость плотности от температуры. Все искомые величины будем представлять в виде

$$f(r, z) = f_0(r, z) + \bar{f}(r, z), \quad (11)$$

где $f_0(r, z)$ — решение для случая, когда $\rho = \rho_{ж}$, а $\bar{f}(r, z)$ — возмущение, вносимое за счет зависимости плотности от температуры.

2.2. Невозмущенное поле скоростей и температур

При постоянной плотности жидкости тепловая и гидродинамическая задачи разделяются. Поле скорости не зависит от распределения температур. Поперечные перетечки отсутствуют.

$$m_{r0} = 0. \quad (12)$$

Продольная компонента массовой скорости постоянна $m_{z0} = \text{const}$ и определяется из уравнений (2) и (5):

$$m_{z0} = \sqrt{\left(\frac{P_{\text{вх}} - P_{\text{вых}}}{l} - \rho_{ж} g\right) \frac{2\rho_{ж} d_{\Gamma}}{\lambda_{\text{ТРЗ}}}}. \quad (13)$$

В качестве возмущающего фактора будем рассматривать и поперечный теплоперенос тепла за счет эффективной теплопроводности теплоносителя, который при расчете активной зоны в поканальном приближении не учитывается. При этом невозмущенное распределение температуры ϑ_0 описывается простым уравнением:

$$cm_{z0} \frac{\partial \vartheta_0}{\partial z} = q_v(r). \quad (14)$$

Тепловыделение, для упрощения принято постоянным по высоте и изменяющееся по радиусу по закону:

$$q_v(r) = \bar{q}_v \left\{ k_r - 2(k_r - 1) \left(\frac{r}{r_0} \right)^2 \right\}, \quad (15)$$

Уравнение (14) легко интегрируется, и невозмущенное распределение имеет вид:

$$\vartheta_0 = \Delta t_0 f(R) Z = \Delta t_0 \left(k_r - 2(k_r - 1) L^2 R^2 \right) Z. \quad (16)$$

2.3. Уравнения для возмущений скоростей и температур

В настоящей постановке источником возмущений является зависимость плотности от температуры. Причем, плотность зависит линейно от температуры:

$$\rho = \rho_{ж} [1 - \beta(t - t_{ж})] = \rho_{ж} - \rho_{ж} \beta \vartheta,$$

т.е. возмущение плотности равно: $\bar{\rho} = -\rho_{ж} \beta \vartheta$ или с учетом (11) $\bar{\rho} = -\rho_{ж} \beta \vartheta_0 - \rho_{ж} \beta \bar{\vartheta}$. Последний член в этом соотношении есть возмущение, которым пренебрегаем. Таким образом, возмущение плотности равно:

$$\bar{\rho} = -\rho_{ж} \beta \vartheta_0. \quad (17)$$

Уравнения для возмущений скоростей и температур получаются, если из исходных уравнений (1)—(5), в которых переменные представляются в виде (12), вычесть уравнения для невозмущенных скоростей и температур (12), (13), (16).

При анализе будем использовать приближение малых возмущений, т.е. будем пренебрегать произведением возмущений по сравнению с возмущением в первой степени. Такой подход позволяет получить для определения возмущений линейную задачу.

Итоговые уравнения движения в безразмерной форме имеют вид:

$$A_Z \frac{\partial M_r}{\partial Z} = -\frac{\partial \wp}{\partial R} + A_{\mu} \frac{\partial}{\partial R} \nabla_R M_r - \bar{K} M_r, \quad (18)$$

$$A_Z \frac{\partial M_Z}{\partial Z} = -\frac{\partial \wp}{\partial Z} + A_{\mu} \nabla_R \left(\frac{\partial M_Z}{\partial R} \right) - 2M_Z + Zf(R), \quad (19)$$

$$\nabla_R M_r + \frac{\partial M_Z}{\partial Z} = 0, \quad (20)$$

т.е. поле возмущений скорости не зависит от возмущений температуры, а определяется только невозмущенным полем температуры.

Возмущение температуры описывается уравнением

$$m_{z0} c \frac{\partial \bar{\vartheta}}{\partial z} = \lambda \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial \bar{\vartheta}}{\partial r} + q_{\text{ВОЗ}}, \quad (21)$$

где роль эффективного источника тепловыделения играет член, определяемый невозмущенным полем температуры ϑ_0 и возмущениям скорости

$$q_{\text{ВОЗ}} = \lambda \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial \vartheta_0}{\partial r} - m_{z0} c \frac{\partial \vartheta_0}{\partial z} - m_{r0} c \frac{\partial \vartheta_0}{\partial r}. \quad (22)$$

Система (18)—(20) включает три уравнения для определения трех неизвестных величин m_r , m_z , \bar{P} .

Граничные условия для возмущений скорости и давления следуют из условий для полных скоростей и давлений (6)—(10).

2.4. Возмущения давления

Получим уравнение для возмущения давления. Для этого применим к уравнению (18) операцию ∇_R , а уравнение (19) проинтегрируем по Z и сложим их. С учетом уравнения неразрывности получим

$$\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} R \frac{\partial \wp}{\partial R} + \frac{\partial^2 \wp}{\partial Z^2} = f(R) - \left(\bar{K} \nabla_R M_r + 2 \frac{\partial}{\partial Z} M_Z \right). \quad (23)$$

Из уравнения следует, что силы инерции и силы вязкого трения на распределение давлений не влияют, а распределение давления определяется только силами плавучести и силами сопротивления.

Численные оценки показывают, что A_Z и A_μ , которые определяют величину соответствующих членов, малые величины (порядка сотых долей), поэтому вместо (18)—(19) получим:

$$M_r = -\frac{1}{K} \frac{\partial \varphi}{\partial R}, \quad (24)$$

$$M_Z = \frac{1}{2} (Z \cdot f(R) - \frac{\partial \varphi}{\partial Z}). \quad (25)$$

Исключая отклонения скоростей из (23) с помощью (24)—(25), окончательно для отклонения давлений получаем уравнение

$$\frac{2}{K} \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} R \frac{\partial \varphi}{\partial R} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial Z^2} = f(R). \quad (26)$$

Граничными условиями для φ будут

$$\begin{aligned} \varphi(Z=0) &= 0, \\ \varphi(Z=1) &= 0, \\ \left. \frac{\partial \varphi}{\partial R} \right|_{R=R_0} &= 0. \end{aligned} \quad (27)$$

В силу однородности граничных условий решения для φ с учетом $f(R) = k_r - 2(k_r - 1)L^2 R^2$ можно представить в виде:

$$\varphi = k_r \varphi_1 + 2(k_r - 1)L^2 \varphi_2. \quad (28)$$

Решениями для φ_1 и φ_2 являются:

$$\varphi_1 = \frac{1}{2} (Z^2 - Z), \quad (29)$$

$$\varphi_2(R, Z) = 2 \sum_{k=1,3,5..} P_k(R) \sin(\pi k Z), \quad (30)$$

где

$$P_k(R) = \frac{2}{(\pi k)^3} \left(\frac{8}{k(\pi k)^2} + R^2 \right) - \frac{4R_0}{(\pi k)^4 \sqrt{k/2}} \frac{I_0(\mu_k R)}{I_1(\mu_k R_0)},$$

$$\mu_k = \pi k \sqrt{K/2}, \quad (31)$$

2.5. Распределение возмущения скоростей

Согласно (24), (25), (28) компоненты возмущения скоростей равны:

$$\begin{aligned} M_r &= \frac{(k_r - 1)}{k} 16L^2 \sum_{k=1,3,5..} \left(\frac{I_1(\mu_k R)}{I_1(\mu_k R_0)} - \frac{R}{R_0} \right) \times \\ &\times \frac{\sin(\pi k Z)}{(\pi k)^3}, \end{aligned} \quad (32)$$

$$M_Z = \frac{k_r}{4} - (k_r - 1)L^2 \times$$

$$\times \left(R^2 Z - 2 \sum_{k=1,3,5..} \pi k P_k(R) \cos(\pi k Z) \right), \quad (33)$$

где $P_k(R)$ и μ_k даются соотношением (31).

3. СОПОСТАВЛЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКОГО И ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЙ

Полученные зависимости для компонент возмущения скоростей (32)—(33) были использованы для тестирования программного комплекса ТРЕТОН [1, 2], предназначенного для теплогидравлических расчетов активных зон реакторов ВВЭР.

На рис. 1, 2 показаны распределения безразмерных массовых скоростей теплоносителя по высоте и радиусу активной зоны, полученные с помощью программы ТРЕТОН для условий активной зоны ВВЭР-1000 вместе с аналитическими оценками по данной модели.

Получено достаточно хорошее совпадение результатов численных и аналитических расчетов, что может рассматриваться как факт успешного тестирования работоспособности программного комплекса ТРЕТОН в части корректного учета сил плавучести.

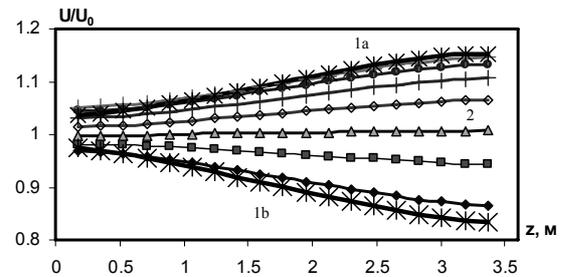


Рис. 1. Распределение безразмерных массовых скоростей теплоносителя по высоте активной зоны: 1a — оценка по аналитической модели для центральной кассеты; 1b — оценка по аналитической модели для периферийных кассет; 2 — расчет по программе ТРЕТОН (различные кассеты в центральном сечении активной зоны)

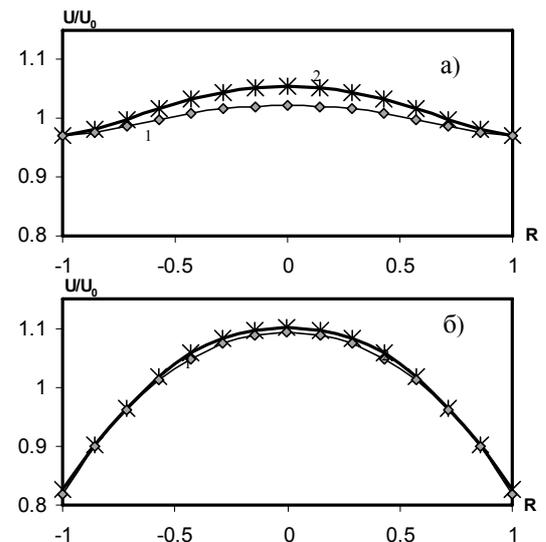


Рис. 2. Распределение безразмерных массовых скоростей теплоносителя по радиусу на входе в активную зону (а) и выходе из нее (б): 1 — оценка по аналитической модели, 2 — расчет по программе ТРЕТОН

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Получено аналитическое решение задачи о подъемном движении жидкости в цилиндрической пористой структуре при заданном перепаде давления. При решении учтено действие на жидкость сил плавучести, обусловленных неравномерным по радиусу тепловыделением в структуре (по параболическому закону) и зависимостью плотности жидкости от температуры. Решение получено методом малых возмущений и справедливо для условий, когда возмущение осевой скорости не превышает (10...15) % от невозмущенного значения.

Полученное решение использовалось для тестирования программного кода ТРЕТОН, предназначенного для теплогидравлических расчетов активных зон реакторов типа ВВЭР.

СПИСОК ОБОЗНАЧЕНИЙ

A_Z — коэффициент в (18), (19);
 A_μ — коэффициент в (18), (19);
 d_r — гидравлический диаметр межстержневого пространства, м;
 g — ускорение свободного падения, м/с²;
 k_r — коэффициент неравномерности тепловыделения по радиусу;
 \bar{K} — отношение коэффициентов гидравлического сопротивления, $\bar{K} = \lambda_{TPr} / \lambda_{TPz}$;
 l — высота пористой структуры, м;
 m — массовая скорость жидкости $m = \sqrt{m_r^2 + m_z^2}$, м/с;
 M — безразмерная массовая скорость, $M = m/m_{z0}$;
 P — давление, Па;
 \wp — безразмерное возмущение давления,
 $\wp = \bar{P} / \rho_{ж} g \beta \Delta t_0 l$;
 q_V — мощность источников тепловыделения, Вт/м³;
 r — координата цилиндрической системы, м;
 R — безразмерная координата, $R = r/l$;

R_0 — безразмерный размер пористой структуры,

$$R_0 = r_0/l;$$

z — координата цилиндрической системы, м;

Z — безразмерная координата, $Z = z/l$;

β — коэффициент объемного расширения, 1/град;

ε — пористость;

λ — эффективная приведенная теплопроводность жидкости, Вт/(м·град);

$\lambda_{TPr}, \lambda_{TPz}$ — коэффициенты гидравлического сопротивления поперек и вдоль сборки стержней;

μ — эффективная приведенная динамическая вязкость жидкости, Па·с;

ρ — плотность жидкости, кг/м³;

ϑ — избыточная температура жидкости, $\vartheta = t(r, z) - t_{ж}$, град;

∇_r, ∇_R — операторы: $\nabla_r = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r$, $\nabla_R = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} R$;

Δt_0 — средний подогрев теплоносителя, град.

Индексы нижние:

r — относит к координате «r»;

z — относит к координате «z»;

vx — относит ко входу в структуру;

$вых$ — относит к выходу из структуры;

$ж$ — при температуре жидкости на входе;

0 — невозмущенное значение.

Индексы верхние:

$\bar{m}, \bar{\vartheta}$ — возмущение величины.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Расчетное** моделирование теплогидравлических процессов в активной зоне реактора ВВЭР-1000 / А.С. Корсун, И.Г. Меринов, В.С. Харитонов, А.А. Холодов // Научная сессия МИФИ-2005: Сб. научн. тр. В 15 т. М.: МИФИ, 2005. Т.8. С.111.
2. **Моделирование** теплогидравлических процессов в активной зоне ВВЭР-1000 / А.С. Корсун, Ю.А. Маслов, И.Г. Меринов и др. // Научная сессия МИФИ-2006: Сб. научн. тр. В 16 т. М.: МИФИ, 2006. Т.8. С.140—141.