УДК 536 24

А.В. Нетелев

Московский авиационный институт, Россия

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ДВУХ ПОДХОДОВ К МАТЕМАТИЧЕСКОМУ МОДЕЛИРОВАНИЮ ПРОЦЕССОВ ТЕПЛОПЕРЕНОСА В РАЗЛАГАЮЩИХСЯ МАТЕРИАЛАХ

АННОТАЦИЯ

В настоящей работе произведено сравнение двух подходов к численному решению системы дифференциальных уравнений теплопереноса в разлагающихся материалах. Сравнение производилось на основании математического моделирования с использованием программных комплексов, разработанных в МАИ.

В настоящее время существует множество подходов к численному решению задач моделирования теплопереноса в разлагающихся материалах, но так так численное решение всегда лишь приближенное решение, то необходимо представлять, какими особенностями обладает тот или иной подход в зависимости от рассматриваемого случая теплового воздействия.

В данной работе производился сравнительный анализ двух подходов численного решения параболического уравнения при различных условиях теплового нагружения.

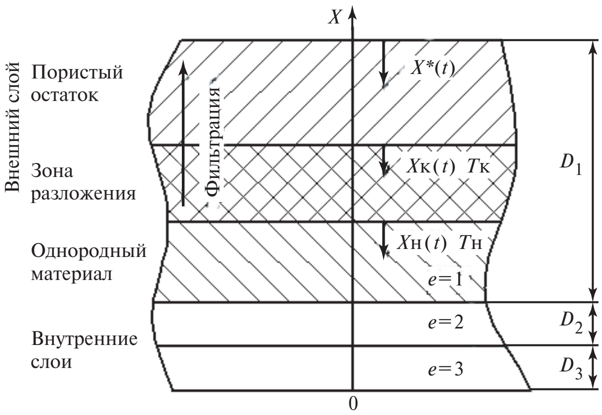

Рис. 1. Схема движения границ

Математическая модель теплопереноса в анализируемом случае:

$$c_l(T)\rho_l \frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda_l(T)\frac{\partial T}{\partial x}\right) - -c_g(T)\rho_g u_g \frac{\partial T}{\partial x} - \dot{\rho}\Delta H; \quad l = \overline{1, L-1},\ \tau \in (0, \tau_m); \tag{1}$$

$$\dot{\rho} = -\rho A \exp\left(\frac{-E}{RT}\right); \tag{2}$$

$$\alpha_{w1}\left(T_{e1} - T_{w1}\right) - \lambda \frac{\partial T}{\partial x}_{w1} - \varepsilon_{w1}\sigma T_{w1}^4 = G_w \Delta H_w; \tag{3}$$

$$\lambda_{l+1}(T)\frac{\partial T}{\partial x}_{x = x_{ls}+0} - \lambda_l(T)\frac{\partial T}{\partial x}_{x = x_l - 0} = 0; \tag{4}$$

$$\alpha_{w2}\left(T_{e2} - T_{w2}\right) - \lambda \frac{\partial T}{\partial x}_{w2} - \varepsilon_{w2}\sigma T_{w2}^4 = 0; \tag{5}$$

$$T_l(x, 0) = T_{l,0}(x). \tag{6}$$

Первый подход реализован путем аппроксимации уравнения теплопроводности на пространственно-временной сетке с постоянной длинной пространственных шагов в каждом отдельном слое [1]. При этом узлы конечно-разностной сетки не попадают на границы зоны разложения.

До тех пор, пока наружный материал не прогрелся до температуры начала разложения $T_i \le T_н$, осуществляется прогрев слоев за счет теплопроводности. Тогда конечно-разностная аппроксимация принимает вид:

$$\tilde{c}_{li}\rho_l \frac{T_i^{j+1} - T_i^j}{\Delta\tau} = \frac{1}{h_l}\left(\frac{\lambda_{l,i+1} + \lambda_{l,i}}{2} \times \right. \times \frac{T_{i+1}^{j+1} - T_i^{j+1}}{h_l} - \left.\frac{\lambda_{l,i} + \lambda_{l,i-1}}{2}\frac{T_i^{j+1} - T_{i-1}^{j+1}}{h_l}\right) + +0\left(\Delta\tau + h_l^2\right),\ i = \overline{1, N-1}, \quad j = 0, 1, 2, \ldots,\ l = 1, 3; \tag{7}$$

$$\tilde{\lambda}_i = \lambda_i^j + \frac{\partial \lambda(T)}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial t} + 0\left(\Delta\tau^2\right) = = 2\lambda_i^j + \lambda_i^{j-1} + 0\left(\Delta\tau^2\right), \tag{8}$$

$$\lambda_i^j = \lambda\left(T_i^j\right),$$

$$\tilde{C}_i = 2C_i^j - C_i^{j-1} + 0\left(\Delta\tau^2\right), \quad C_i^j = C\left(\Delta T_i^j\right), \tag{9}$$

$$T_i^0 = T_{нач}\left(X_0\right),\ \ i = \overline{0, N}; \tag{10}$$

$$\left(\frac{\alpha}{C_p}\right)_{w_1}^{j+1}\left(I_{e_1}^{j+1} - C_{pw_1}T_{w_1}^{j+1}\right) - -\frac{\tilde{\lambda}_0 + \tilde{\lambda}_1}{2}\frac{\left(T_{w_1}^{j+1} - T_1^{j+1}\right)}{h_I} - \varepsilon_{w_1}\sigma\left(T_{w_1}^{j+1}\right)^4 = = \frac{C_{I0}\rho_I h_I}{2\Delta\tau}\left(T_{w_1}^{j+1} - T_{w_1}^j\right) + 0\left(\Delta\tau + h^2\right), \quad i = 0,\ \ j = 0, 1, 2, \ldots, l = 1; \tag{11}$$

$$\alpha_{w_2}^{j+1}\left(T_{e_2}^{j+1}-T_{w_2}^{j+1}\right)+\frac{\left(\tilde{\lambda}_{III}\right)_{N-1}+\left(\tilde{\lambda}_{III}\right)_N}{2}\times$$
$$\times\frac{T_{N-1}^{j+1}-T_{w_2}^{j+1}}{h_{III}}-\varepsilon_{w_2}\sigma\left(T_{w_2}^{j}\right)^4= \tag{12}$$
$$=\frac{\left(\tilde{C}_{III}\right)_N\rho_{III}h_{III}}{2\Delta\tau}\left(T_N^{j+1}-T_N^j\right)+$$
$$+0\left(\tau+h^2\right),\ i=N,\ j=0,1,2,...,\ l=3.$$

Условие на границах разрыва теплофизических характеристик аппроксимируется следующим образом:

$$\frac{\left(\tilde{\lambda}_{l-1}\right)_{i-1}+\left(\tilde{\lambda}_{l-1}\right)_i}{2}\frac{T_{i-1}^{j+1}-T_i^{j+1}}{h_{l-1}}-$$
$$-\frac{\left(\tilde{\lambda}_l\right)_i+\left(\tilde{\lambda}_l\right)_{i+1}}{2}\frac{T_i^{j+1}-T_{i+1}^{j+1}}{h_s}= \tag{13}$$
$$=\frac{\left(\tilde{C}_i\rho h\right)_{l-1}+\left(\tilde{C}_i\rho h\right)_l}{2\Delta\tau}\left(T_i^{j+1}-T_i^j\right)+$$
$$+0\left(\Delta\tau,h_1^2+h_2^2\right),\ X=X,\ l=2,3,....$$

При появлении подвижной границы $X_н$ в зоне разложения имеет место следующая аппроксимация уравнения теплопроводности:

$$\frac{\tilde{C}_p{}^{j+1}\rho_i+\tilde{C}_p{}^{j}\rho_i}{2}\frac{T_i^{j+1}-T_i^j}{\Delta\tau}=\frac{1}{h_1}\times$$
$$\times\left(\frac{\lambda_{l,i+1}+\lambda_{l,i}}{2}\frac{T_{i+1}^{j+1}-T_i^{j+1}}{h_l}-\right.$$
$$\left.-\frac{\lambda_{l,i}+\lambda_{l,i-1}}{2}\frac{T_i^{j+1}-T_{i-1}^{j+1}}{h_l}\right)+ \tag{14}$$
$$+\dot{\rho}\Delta\tilde{H}-c_g\rho_g u_g+$$
$$+0\left(\tau+h_l^2\right),\ i=\overline{Zк,Zн-1},$$
$$j=\tau н,\tau н+1,\tau н+2,...,$$

где $\Delta\tilde{H}=2\Delta H_i^j+\Delta H_i^{j-1}$.

При появлении границы окончания зоны разложения X_k образуется зона фильтрации пиролизных газов, аппроксимация в которой имеет вид:

$$\left(\frac{\alpha}{C_p}\right)_{w_1}^{j+1}\left(I_{e_1}^{j+1}-C_{pw_1}T_{w_1}^{j+1}\right)-$$
$$-\frac{\tilde{\lambda}_0+\tilde{\lambda}_1}{2}\frac{\left(T_{w_1}^{j+1}-T_1^{j+1}\right)}{h_I}-\varepsilon_{w_1}\sigma\left(T_{w_1}^{j+1}\right)^4-$$
$$-\frac{C_{10}\rho_1h_1}{2\Delta\tau}(T_{w1}^{j+1}-T_{w1}^j)= \tag{15}$$
$$=\begin{cases}\dot{m}\Delta H,\ T_{w_1}=T^*\left(I_{e_1}(t)\right),\ T_{w_1}>T^*,\\ x=X_{w_1}^*(t),\ t_{нач}^*<t<t_{кон}^*;\\ \quad 0,\ T<T^*,\ x=X_{w_1},\\ \quad 0<t<t_{нач}^*,\ t_{кон}^*<t<t_k;\end{cases}$$
$$i=0,\ \ l=1.$$

При достижении внешней границей уноса материала очередного узла сетки он исключается из дальнейших расчетов.

Особенностью второго подхода является использование предварительного преобразования координат на пространственно-временной сетке:

$$\tau'=\tau,x'=(x-X_{l-1})/(X_l-X_{l-1}).$$

Данное преобразование дает возможность работать с постоянным количеством узлов и не производить оценку положения границ зон разложения относительно узлов сетки [2],[3].

После преобразования система

$$C_l(T_l,x,\tau)\frac{\partial T_l}{\partial\tau}=\frac{\partial}{\partial x}(\lambda_l(T_l,x,\tau)\frac{\partial T}{\partial x})+$$
$$+Q_l(T_l,x,\tau)\frac{\partial T_l}{\partial x}+P_l(T_l,x,\tau)T_l+S_l(T_l,x,\tau), \tag{16}$$

$$T=T_l(x,\tau),x\in(0,1), \tag{17}$$
$$l=\overline{1,L},\tau\in(0,\tau_m];$$

$$T_l(x,0)=T_{l0}(x),l=\overline{1,L},x\in[0,1]; \tag{18}$$

$$a_0\left(T_1(0,\tau),\tau\right)\frac{\partial T_1(0,\tau)}{\partial x}+b_0(T_1(0,\tau),\tau)\times$$
$$\times T_1(0,\tau)=d_0(\tau),\tau\in(0,\tau_m]; \tag{19}$$

$$a_L\left(T_L(1,\tau),\tau\right)\frac{\partial T_L(1,\tau)}{\partial x}+b_L(T_L(1,\tau),\tau)\times$$
$$\times T_L(1,\tau)=H(T_L(1,\tau),\tau),\tau\in(0,\tau_m]; \tag{20}$$

$$a_l\left(T_1(1,\tau),\tau\right)\frac{\partial T_1(1,\tau)}{\partial x}+b_l(T_1(1,\tau),\tau)\times$$
$$\times T_1(1,\tau)+d_l(T_{l+1}(0,\tau),\tau)\frac{\partial T_l(0,\tau)}{\partial x}+ \tag{21}$$
$$+f_l(T_{l+1}(0,\tau),\tau)T_{l+1}(0,\tau)=\varpi_l(\tau),$$
$$l=\overline{1,L-1},\tau\in(0,\tau_m];$$

$$g_l\left(T_1(1,\tau),\tau\right)\frac{\partial T_1(1,\tau)}{\partial x}+h_l(T_1(1,\tau),\tau)\times$$
$$\times T_1(1,\tau)+e_l(T_{l+1}(0,\tau),\tau)T_{l+1}(0,\tau)=\upsilon_l(\tau), \tag{22}$$
$$l=\overline{1,L-1},\tau\in(0,\tau_m]$$

принимает вид:

аппроксимация граничных условий:

$$\frac{\lambda_{N-1}^j+\lambda_N^j}{2}\frac{-T_{N-2}^j+4T_{N-1}^j-3T_N^j}{\Delta x}-$$
$$-\left(\frac{\alpha}{C_p}\right)\left(I_e^j-C_{pw1}T_{w1}^j\right)+\varepsilon_{w1}\sigma(T_{w1}^j)^4=0, \tag{23}$$

$$\frac{\lambda_2^j+\lambda_1^j}{2}\frac{-T_3^j+4T_2^j-3T_1^j}{\Delta x}-\left(\frac{\alpha}{C_p}\right)\left(I_e^j-C_{pw2}T_{w2}^j\right)+\varepsilon_{w2}\sigma(T_{w2}^j)^4=0. \tag{24}$$

Условия сопряжения на внутренних границах:

$$\left(\frac{\lambda_{Nl-1}^j+\lambda_{Nl}^j}{2}\right)\left(\frac{T_{Nl-2}^j-4T_{Nl-1}^j+3T_{Nl}^j}{2\Delta x}\right)-\left(\frac{\lambda_{Nl+1}^j+\lambda_{Nl+2}^j}{2}\right)\left(\frac{T_{Nl+3}^j-4T_{Nl+2}^j+3T_{Nl+1}^j}{2\Delta x}\right)=0. \tag{25}$$

С момента достижения наружной стенкой температуры начала разложения появляется зона разложения:

$$\begin{aligned}C_i^j\frac{T_i^j-T_i^{j-1}}{\Delta\tau}&=k_i^j\frac{1}{\Delta x}\Big(\frac{\lambda_{i+1}^j+\lambda_i^j}{2}\frac{T_{i+1}^j-T_i^j}{\Delta x}-\\&-\frac{\lambda_i^j+\lambda_{i-1}^j}{2}\frac{T_i^j-T_{i-1}^j}{\Delta x}\Big)+\\&+\frac{Q_i^j+\left|Q_i^j\right|}{2\lambda_i^j}\frac{T_{i+1}^j-T_i^j}{\Delta x}\frac{\lambda_{i+1}^j+\lambda_i^j}{2}+\\&+\frac{Q_i^j+\left|Q_i^j\right|}{2\lambda_i^j}\frac{T_i^j-T_{i-1}^j}{\Delta x}\frac{\lambda_i^j+\lambda_{i-1}^j}{2}-\\&-S_l=0,\end{aligned} \tag{26}$$

где $k_i^j=\dfrac{1}{1+\mathrm{Re}_i^j}, \mathrm{Re}_i^j=\dfrac{\left|\Delta Q_i^j\right|\Delta x}{2\lambda_i^j}, S=-\dot{\rho}\Delta H$.

Положения границ зоны разложения определяются интерполяцией, после чего расчеты повторяются до достижения заданной точности.

Сравнение данных двух подходов проводится по результатам расчета со следующими входными данными:

$\rho=1015$ кг/м^3;

$T_н=800$ К;

$T_к=970$ К;

$C=2480$ Дж/(кг·К);

$\lambda=0,0004$ Вт/(м·К);

$\Delta H=600$ кДж/кг;

$\Delta H_w=1200$ кДж/кг;

$E=2203$ К.

По результатам расчета построено распределение температур, которое приведено на рис. 2.

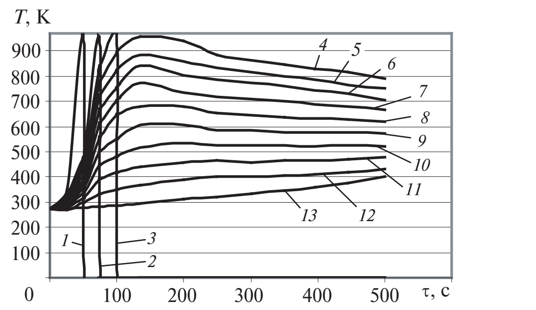

Рис. 2. Зависимость температуры от времени для различных точек: 1 — 0 м; 2 — 0.0005 м; 3 — 0.001 м; 4 — 0.0015 м; 5 — 0.002 м; 6 — 0.0025 м; 7 — 0.003 м; 8 — 0.0035 м; 9 — 0.004 м; 10 — 0.0045 м; 11 — 0.005 м; 12 — 0.0055 м; 13 — 0.006 м

СПИСОК ОБОЗНАЧЕНИЙ

$T_н$ - температура начала разложения материала , К;

$T_к$ -температура конца разложения материала, К;

T^* -температура начала уноса материала, К;

C - теплоемкость, Дж/(м^3·К);

λ -теплопроводность, Вт/(м·К);

λ_{eff} -эффективная теплопроводность в зоне разлагающегося материала, Вт/(м·К);

ΔH - тепловой эффект физико-химических превращений в разлагающемся материале, Дж/кг;

ρ - плотность материала, кг/м^3;

$П$ - коэффициент пористости разложившегося материала;

α - коэффициент теплоотдачи, Вт/(м^2·К);

$u_г$ - скорость фильтрации газов, м/с;

ΔH_w -эффективная энтальпия уноса материала, Дж/ К;

I_e -энтальпия восстановленного потока, Дж/К;

$\dot{m}$ - массовая скорость уноса материала, кг/с;

h - шаг по пространству, м;

Δx -безразмерный шаг по пространству после преобразования координат;

$\Delta\tau$ - шаг по времени, с;

$\varepsilon_{w1},\varepsilon_{w2}$ - коэффициенты черноты на внешней и внутренних стенках;

R_t - коэффициент термического сопротивления;

E/R -энергия активации, К.

Индексы:

i -номер пространственной точки;

j -номер временного слоя;

W_1 -наружная граница;

W_2 - внутренняя граница;

l- номер слоя;

g -газ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Формалев В.Ф., Федотенков Г.В., Кузнецова Е.Л.** Моделирование теплового разрушения композиционных материалов // Материалы X Международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред».
2. **Алифанов О.М., Вабищевич П.Н., Михайлов В.В. и др.** М.: Логос, 2001. 400 с.
3. **Алифанов О.М., Артюхин Е.А., Ненарокомов А.В.** Идентификация математических моделей сложного теплообмена. М.: Изд-во МАИ, 1999. 268 с.